LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL

SERIES SECUNDA
OPERA MECHANICA ET ASTRONOMICA
VOLUMEN SECUNDUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXII

LEONHARDI EULERI

MECHANICA

SIVE MOTUS SCIENTIA
ANALYTICE EXPOSITA

EDIDIT

PAUL STÄCKEL

TOMUS ALTER

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXII

MECHANICAE

TOMUS ALTER

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET

MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.

ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI

EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

A. 1736.

PRAEFATIO

Quemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis sollicitatorum exposui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare constitui; quae differentia in motus explicatione tanti est momenti, ut ex ea merito totius operis divisio sit facta. In motu enim libero via a corpore descripta cum ex motu iam insito, tum ex potentiis tam absolutis quam resistentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia praeter potentias et resistentiam nihil adesse ponitur, quod corporis motum determinet. Atque idcirco motus liberi haec est primaria proprietas, ut via a corpore descripta omnino non prematur; canalis scilicet secundum viam, quam corpus describere debet, exacte incurvatus a corpore transeunte nullam omnino pressionem sustinebit, sed corpus per eum libere transibit. In motu autem non libero praeter potentias et resistentiam, quibus corpus sollicitatur, viam praescriptam esse ponimus, ita ut corpus sit coactum in hac via moveri. Haec ergo via praescripta ad instar canalis commode considerari potest, in quo corpus movetur, neque ex eo erumpere potest. Cum igitur in istiusmodi motibus data sit via, in qua corpus moveri debet, inquirendum est, quantam corpus a quibuscunque potentiis et resistentia sollicitatum in singulis locis habiturum sit celeritatem, quippe qua cognita totus motus perfecte cognoscitur. Praeterea autem cum corpus, nisi in hoc canali esset inclusum, aliam lineam describeret, retinebit saltem in canali conatum in ea linea, in qua, si liberum esset, moveretur, progrediendi hocque conatu latera canalis premet et, nisi satis habeant firmitatis, reipsa disrumpet. Hanc ob rem praeter celeritatem, quam corpus in singulis canalis locis habebit, determinari debet quoque pressio, quam in latera canalis exercet, eiusque pressionis directio, quo firmitas laterum canalis ad corpus retinendum requisita cognoscatur. Huiusmodi autem motus non liberi etiam sine canali aliis modis produci possunt, id quod observare licet in pendulis atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea moveri cogitur. Pendulis enim, prout HUGENIUS docuit, effici potest, ut corpus in quacunque curva praescripta moveri cogatur, quemadmodum in pendulis tum simpliciter suspensis, quibus corpus in linea circulari moveri

cogitur, apparet, tum iis, quae intra cycloides suspendi solent, quibus corpus in cycloide moveri cogitur; similique modo effici potest, ut corpus in data quaque curva incedere cogatur.

Haec igitur est prima species motus non liberi, qui fit super data linea. Praeter eam autem alia species motus non liberi attendi meretur, in qua non ipsa quidem via, sed tantum superficies praescribitur, in qua corpus moveri cogitur; minus igitur haec motuum non liberorum species est restricta quam prior, cum in hac corpori adhuc libertas sit relicta sibi viam in data superficie sitam eligendi. Hanc ob rem haec motus non liberi species ita tractari debet, ut primo linea in data superficie determinetur, quam corpus a potentiis et resistentia sollicitatum describet, deinde vero, ut celeritas corporis in singulis huius lineae punctis definiatur, tertio denique, ut etiam pressio, quam corpus in superficiem exercet, investigetur. Huiusmodi autem motus non liberi pariter ac priores pendulis quoque commode repraesentari possunt; corpus enim pendulum oblique impulsum, ut eius directio non sit in plano verticali, lineas curvas varii generis describet, quae autem omnes sunt in superficie sphaerica, cuius centrum in ipso suspensionis puncto extat. Inquisitio ideo huius motus huc redit, ut in superficie sphaerica primo linea, quam corpus proiectum describet, determinetur, deinde vero celeritas in singulis locis et tertio pressio, quam in superficiem exercet. Simili modo etiam perspicitur effici posse, ut corpus pendulum non ad superficiem sphaericam, sed ad aliam quamque restringatur, dum scilicet circa punctum suspensionis superficies evoluta disponatur. Haec igitur est altera motuum non liberorum species, quae in motu super data superficie determinando occupatur; atque in his duabus motuum non liberorum speciebus indagandis totus hic Tomus secundus absolvitur.

Quo ergo ad hanc tractationem, quae scitu necessaria sunt, praeparentur, in Capite primo fundamenta et principia exposui, ex quibus, quae ad cognitionem utriusque speciei motuum non liberorum pertinent, derivari queant. Demonstravi nimirum corpus a nullis potentiis sollicitatum tam super data linea quam super superficie motu aequabili moveri debere; in superficie autem fore viam a corpore descriptam ipsam lineam brevissimam, quae in ea superficie duci potest. Deinde investigavi leges generales, quas quaeque potentiae atque etiam resistentia tum in accelerando vel retardando motum, tum in pressione generanda observant. Ad haec etiam doctrina de vi centrifuga exponitur, quam corpora etiam a nullis potentiis sollicitata exercent quaeque ex motu curvilineo, quo corpus incedere cogitur, ortum habet.

In Capitibus deinde secundo et tertio motus corporum super data linea tam in vacuo quam in medio resistente fuse contemplor et examino. Primo nimirum motum determino, quo corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum super data linea sive recta sive curva movetur, sive descendendo sive ascendendo; atque si curva ita fuerit comparata, ut tam ad descensus quam ascensus producendos sit idonea, oscillationes quoque definio easque inter se ratione temporum comparo; atque in hoc negotio indolem et proprietates oscillationum tam in circulo quam cycloide factarum definio. Deinceps problemata tracto inversa, quibus

potissimum pro datis potentiis sollicitantibus in curvas inquiro, super quibus motus datam habeat proprietatem. Huc scilicet pertinent problemata de inveniendis curvis aequabilis descensus vel recessus a dato puncto et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam sunt tractata, vel ad quae ipsum institutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problemata de lineis brachystochronis et tautochronis, quorum utrumque ad ulteriorem, quam adhuc a quoquam est factum, perfectionis gradum evexi. Circa curvas enim brachystochronas errorem, qui a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi et loco principii HUGENIANI in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui, quo demonstravi in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypothesi quacunque eam perpetuo curvam esse brachystochronam, super qua corpus ita moveatur, ut tota pressio duplo sit maior quam vis centrifuga. Simili modo novam atque genuinam curvas tautochronas inveniendi methodum trado (quae enim ante sunt inventae tautochronae, nulla omnino methodo, sed potius divinatione sunt erutae), cuius ope non solum cycloidem iam dudum sub tautochronae nomine celebrem inveni, sed praeter eam innumerabiles alias curvas quaesito satisfacientes elicui, inter quas adeo curvam algebraicam observavi; praeterea tam ex aliis agnatis quaestionibus in vacuo quam ex integra huius negotii tractatione pro medio resistente praestantiam et utilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum uti haec methodus instar speciminis tam Analyseos quam Mechanicae promotae est censenda, ita quoque passim in difficiliorum quorundam problematum solutionibus non contemnenda Analyseos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promota esse videatur.

In quarto denique Capite motum super data superficie persequor, quae doctrina, uti a nemine adhuc est tacta, ita quoque tractatu est difficillima propter naturam et proprietates solidorum nondum satis perspectas neque ad calculum revocatas. Antequam igitur de huius modi motu quicquam statui potuerat, methodum exponere necesse erat, qua proprietates superficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiici possent. Hoc itaque praestiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tum in Comment. Tomo III ad lineam brevissimam super quavis superficie determinandam, tum in huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos investigandos sum usus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in corpora super superficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore descriptam quam reliqua motus symtomata inveniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus versamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis, omissa resistentia omnia ad vacuum et gravitatem ordinariam reduxi atque praecipue motum pendulorum oblique oscillantium sum perscrutatus, cuius motus anomalias et absidum progressiones diligenter determinavi.

Haec igitur sunt, quae in isto Tomo secundo sum complexus, quibus expeditis operam dabo, ut, quam primum licuerit, motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum in ordinem reducam atque pari methodo exponam.

INDEX CAPITUM[1]

TOMI SECUNDI

1) Index ab editore additus est. P. St.

CAPUT PRIMUM

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE

DEFINITIO 1

1. *Corpus non libere moveri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quo minus iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus insiti tum ratione potentiarum sollicitantium moveri deberet.*

SCHOLION 1

2. In motu puncti libero, quem parte prima exposuimus, spatium, in quo corpus movebatur, ab omnibus obstaculis vacuum assumsimus; nunc vero spatium ita comparatum ponemus, ut corpori non liceat in quaque directione progredi propter firmos parietes transitum non permittentes.

COROLLARIUM 1

3. Quando itaque corpus in motu suo obstaculum invenit ideoque eam directionem, secundum quam tendit, conservare non potest, tum vel quiescere vel in alia directione motum continuare debebit.

COROLLARIUM 2

4. In quanam autem directione corpus progrediatur post occursum obstaculi, ex circumstantiis tum motus tum positionis obstaculi iudicari debet.

SCHOLION 2

5. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percussione pertinere, qua de re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obsta-

cula assumimus, quae illam notitiam non requirunt. Sunt haec obstacula continua, quae motum puncti restringunt neque ullam reflexionem admittunt; cuiusmodi est tubus vel canalis sive rectus sive incurvatus, in quo corpusculum motum continuare debet. Hoc casu via penitus praescribitur, in qua corpus progredietur, neque propter tubi firmitatem inde egredi poterit. Quare cum hic loco corporis punctum consideremus, hac positione punctum in data linea moveri debebit neque ex ea excedere poterit.

SCHOLION 3

6. Duas autem hoc libro pertractabimus motus impediti seu restricti species, quarum primae modo mentionem fecimus quaeque complectitur motus punctorum super data linea sive recta sive curva. Altera species minus restringit motus libertatem; superficiem enim tantum praescribit, in qua corpus perpetuo versari debeat. Atque has duas motus impediti species isto libro sumus exposituri.

COROLLARIUM 3

7. Quae igitur in prima specie sunt inquirenda, sunt corporis seu potius puncti celeritas in quovis lineae praescriptae loco, pressio in hanc lineam et tempus, quo punctum datam viae portionem percurrit.

COROLLARIUM 4

8. Circa motus alterius speciei autem praeter haec inveniri debet ipsa linea, quam corpus super superficie data describit. Quarum rerum fontes hoc primo capite aperiemus.

SCHOLION 4

9. Hoc vero capite primum investigabimus motus utriusque speciei, si corpus a nullis potentiis sollicitetur; ubi ostendimus, qua celeritate id progredi debeat et quanta vi ubique tam lineam datam quam superficiem datam premat. Sed si superficies tantum data fuerit, praeterea viam determinabimus, in qua corpus movebitur a nullis potentiis sollicitatum. Deinde vero principia exponemus, ex quibus iudicari licebit, quae mutationes a potentiis sollicitantibus tam absolutis quam relativis oriantur, quo in sequentibus capitibus singula distincte deducere queamus.

SCHOLION 5

10. In his autem motibus tam super lineis quam superficiebus datis animum ab omni frictione abstrahimus neque ullam motus retardationem ponemus. Quamobrem lineae et superficies, super quibus puncta moveri ponuntur, levissimae concipi debent et omni asperitate destitutae, ne motus retardationi propter eam sit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino ex animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae demum in sequentibus explicari possunt. Hanc ob rem punctum quasi rependo moveri concipiendum est, ut eius pars quaeque, si modo in puncto partes concipi possunt, eundem habeat motum.

SCHOLION 6

11. Quae igitur in praecedente libro traditae sunt et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari possunt, si modo eorum motus sibi sit perpetuo parallelus et omnes partes corporis aequali motu sint praeditae. Hoc vero ex sequentibus libris clarius apparebit, quibus casibus finitorum corporum motus a motu punctorum non discrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum consideramus, quia, ut partibus destituuntur, ita etiam in partibus diversi motus inesse nequeunt.

PROPOSITIO 1

THEOREMA

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data movetur et a nullis potentiis sollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conservabit, si modo illius lineae duo quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituant.*

DEMONSTRATIO

Quia corpus, dum in linea AM (Fig. 1, p. 10) movetur, a nulla potentia sollicitatur neque frictioni ullus conceditur locus, motus corporis aliter variari nequit, nisi quatenus linea AM impedit, quo minus corpus libere moveri possit; ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, investigandum est. Sit celeritas, quam corpus in M habet, $= c$; hac igitur celeritate corpus, si libere moveretur, in tangente $M\nu$ progrederetur; quod vero, quia corpus curvam AM deserere

non potest, fieri nequit, sed corpus cogitur per Mm progredi. Hanc ob causam concipiatur motus corporis secundum $M\nu$ resolutus in motum per Mm et motum per Mn, existente $Mm\nu n$ parallelogrammo rectangulo. Perspicuum hic est motum per Mn, cuius directio est normalis in curvae elementum Mm, penitus absorberi neque ullum effectum in celeritate immutanda habere posse. Corpus igitur altero motu progredietur in Mm celeritate, quae est ad pristinam celeritatem ut Mm ad $M\nu$; quare celeritas, qua corpus elementum Mm describit, erit $=\frac{Mm\cdot c}{M\nu}$. Quoniam vero $M\nu m$ est triangulum ad m rectangulum ideoque $Mm < M\nu$, celeritas haec minor erit quam prior c atque celeritatis decrementum erit $=\frac{(M\nu - Mm)c}{M\nu}$. Ad huius valorem inveniendum sit MO, radius osculi curvae in M, $=r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. $O =$ ang. $mM\nu$, $MO : Mm = Mm : m\nu$, ex quo prodit $m\nu = \frac{ds^2}{r}$ atque

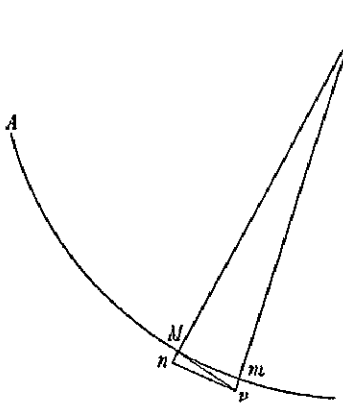


Fig. 1.

$$M\nu = \sqrt{\left(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2}\right)} = \frac{ds}{r}\sqrt{(r^2 + ds^2)} = ds + \frac{ds^3}{2r^2}.$$

Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curvae elementum ds percurrit,

$$= \frac{cds^2}{2r^2},$$

cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curvae AM portionem percurrit. At expressio $\frac{cds^2}{2rr}$ aequivalet differentiali secundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis, postquam corpus quantumvis arcum curvae datae percurrit, erit infinite parvum atque corpus motu uniformi feretur per totam curvam AM, si modo radius osculi r nusquam fuerit infinite parvus. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

13. In omni igitur curva, in qua radius osculi nusquam est infinite parvus, corpus movebitur uniformiter, siquidem a nullis potentiis sollicitatur neque frictionem patitur.

COROLLARIUM 2

14. Si radius osculi est infinite parvus, tum $\frac{cds^2}{2r^2}$ vel est quantitas finita vel differentiale primi gradus. Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite parvum.

COROLLARIUM 3

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curvis sint rara et a se invicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu uniformi percurret.

SCHOLION 1

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi ubi curva habet cuspides. His enim in locis corpus directe reverti cogitur et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur atque ita motum uniformem conservabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

SCHOLION 2

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curvis puncta, in quibus radius curvedinis est infinite parvus; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita et angulus deinceps positus est infinite parvus, fieri non potest, ut ex demonstratione apparet, ut corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem, cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili movebitur.

COROLLARIUM 4

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curva semper motu aequabili feretur; at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

2*

SCHOLION 3

19. Ut haec clarius percipiantur, sint duo curvae elementa AB, BC (Fig. 2) et anguli ABC, quem constituunt, deinceps positus CBD infinite parvus, cuius sinus sit dz posito sinu toto $= 1$. Quia corpus, postquam elementum AB descripsit, vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit c, eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendiculo DC corpus altero motu per BC movebitur celeritate, quae est ad priorem ut BC ad BD, i. e. ut $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c - \frac{cdz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{cdz^2}{2}$, quod aequivalet differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curva angulus CBD fuerit infinite parvus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curva angulus [CBD] vel est infinite parvus vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus uniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus uniformitas conservatur.

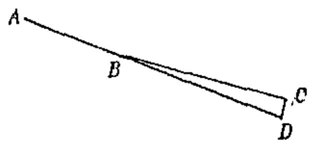


Fig. 2.

PROPOSITIO 2

THEOREMA

20. *Dum corpus motu uniformi in curva AM* (Fig. 1, p. 10) *movetur, in singulis punctis M premet curvam normaliter vi, quae est ad corporis vim gravitatis ut altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi.*

DEMONSTRATIO

Si corpus in curva AM libere moveri deberet motu aequabili, tum ubique vim adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahentem tantam, quae se haberet ad corporis gravitatem ut altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium osculi MO, ut ex demonstratis libri praecedentis [§ 165, 209, 552] apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta progrederetur. Hoc autem casu canalis AM, in quo corpus inclusum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter

premet secundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali AM libere moveretur neque illum premeret; hac vero vi absente, ut hic ponimus, necesse est, ut corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et radius osculi $MO = r$ atque gravitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum, erit vis, qua corpus canalem in M secundum Mn premet, $= \frac{2v}{r}$.

COROLLARIUM 2

22. Si corpus maiore vel minore celeritate moveretur in curva AM, tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

COROLLARIUM 3

23. Directio huius pressionis est normalis in curvam et directe contraria est positioni radii osculi MO. Quare radius osculi in alteram curvae partem productus dabit directionem huius pressionis.

COROLLARIUM 4

24. Si corpus in linea recta movetur, haec pressio erit nulla ob radium osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta uniformiter sponte progreditur et hanc ob rem canalem rectum non premit.

COROLLARIUM 5

25. Si curva AM fuerit circulus, pressio ubique erit eadem. F
maior erit, quo minor est radius circuli. Existente enim celeritat
pressio erit reciproce ut radius circuli.

SCHOLION 1

26. Quo corpus in curva AM libere mover
est, ut secundum normalem MO trahatur vi

corpus tanta vi in plagam oppositam niti; alioquin enim illa vi non esset opus ad corpus in curva conservandum. Dum igitur corpus in canali AM moveri cogitur neque eius nisus a vi normali tollitur, hunc nisum re ipsa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, ut hanc pressionem sustinere queat.

COROLLARIUM 6

27. Apparet igitur corpus motum sine ullo celeritatis dispendio effectum edere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

COROLLARIUM 7

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem, uti ex pressione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu pressio oriri potest.

SCHOLION 2

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus libro primo [§ 102], incertum esse, utrum motus potentiis debeatur an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo utrumque, potentias nempe et motum, existere; utrum igitur alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex observationibus decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corporibus conatus insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere. Praeterea vero is phaenomenorum causas genuinas dedisse censendus est, qui omnia a motu orta demonstraverit. Motum enim semel existentem perpetuo conservari debere clare ostendimus supra [§ 63]; hic vero, quemadmodum ex motu potentiae oriantur, exposuimus. Quemadmodum vero potentiae sine motu vel existere vel conservari queant, concipi non potest. Quamobrem concludimus omnes potentias, quae in mundo conspiciuntur, a motu provenire; atque diligenti scrutatori incumbit investigare, ex quonam quorumque corporum motu quaelibet potentia in mundo observata ortum suum habeat.

SCHOLION 3

30. Cum difficile intellectu sit, quomodo talis effectus, pressio scilicet continua, a corpore moto sine ullo celeritatis dispendio oriatur, operae pretium erit in huius rei causam inquirere. Vidimus in praecedente propositione

motum corporis in curva linea non absolute aequabilem esse, sed celeritatem revera decrementum pati, dum corpus per singula elementa curvae movetur. Haec vero decrementa differentialibus secundi gradus aequivalent, ut etiam infinities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere queant. Huic igitur infinite parvo celeritatis decremento pressionem adscribi debere iudico; in hacque sententia eo magis confirmor, quod, quo maius sit hoc celeritatis decrementum, eo maior quoque existat pressio. Cum pressio in M sit $\frac{2v}{r}$ hacque vi totum elementum Mm, dum percurritur, prematur, licebit huius pressionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2v\,ds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inventum est $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (§ 12). Quod autem ibi erat c, hic nobis est $\sqrt{v}$; ergo cum esset $-dc = \frac{c\,ds^2}{2r^2}$, erit

$$-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2} \quad \text{seu} \quad -dv = \frac{v\,ds^2}{r^2}.$$

Habebitur ergo $-4v\,dv = \frac{4v^2ds^2}{r^2} =$ quadrato pressionis, quam sustinet elementum Mm.

COROLLARIUM 8

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitae aequivalet decremento ipsius $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2, tum pressio aequalis est vi gravitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognoscitur.

COROLLARIUM 9

32. His ergo concessis istud infinities infinite parvum celeritatis decrementum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim ipsius v^2 decrementum homogeneum est ipsi ds^2, pressio est finita; sin vero id decrementum infinities maius existeret quam ds^2, pressio quoque foret infinite magna.

DEFINITIO 2

33. *Pressio haec, quam corpus in linea curva motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga, eo, quod eius directio a centro circuli osculatoris O tendit.*

COROLLARIUM 1

34. Vis centrifuga ergo est ad vim gravitatis ut altitudo celeritati debita ad dimidium radium osculi.

COROLLARIUM 2

35. Quando ergo corpus in linea curva moveri cogitur, hanc curvam vi centrifuga premit, etiamsi a nulla potentia sollicitetur.

SCHOLION

36. Quando vero corpus a potentiis quoque sollicitatur, pressio quoque in canalem ab his potentiis orietur tumque canalis duplici ratione premetur, partim nempe a potentiis, partim a vi centrifuga. Nunc igitur, quid potentiae in corpus non libere motum valeant, investigandum est.

PROPOSITIO 3

THEOREMA

37. *Si corpus, quod in canali AM* (Fig. 3) *movetur, sollicitetur in M a potentia MN, cuius directio normalis est in curvam AM, celeritas neque augebitur neque minuetur, sed tota potentia in premendo canali consumetur.*

DEMONSTRATIO

Ex priore libro [§ 164] manifestum est potentiam, cuius directio in directionem motus sit normalis, celeritatem neque augere neque minuere. Quanquam hocenim ibi de motu libero est demonstratum, hic tamen eodem rigore locum habet, cum potentia normalis corpus neque in consequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non potest. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem et consequenter tanta vi canalem premet in directione MN. Q. E. D.

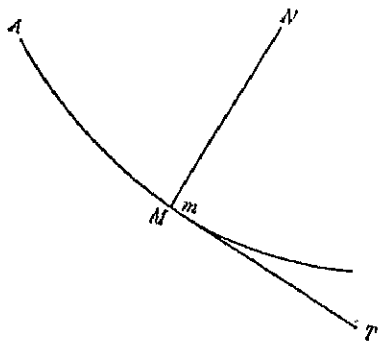


Fig. 3.

COROLLARIUM 1

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim centrifugam, hoc casu minuit.

COROLLARIUM 2

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curvae partem incidit, eius effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam incidit; at si normalis vis in concavam partem dirigitur, minuetur effectus.

COROLLARIUM 3

40. Si vis normalis fuerit $=N$ et vis centrifuga ut ante $=\frac{2v}{r}$, premetur curva vel vi $\frac{2v}{r}+N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r}-N$, si fuerint contrariae.

COROLLARIUM 4

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curva nullam pressionem sustinebit, seu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo casu eandem curvam corpus libere describeret; id quod perspicuum quoque est ex vi normali, quae tum est $\frac{2v}{r}$; hac enim efficitur, ut corpus aequabiliter in quacunque curva libere moveatur.

PROPOSITIO 4

THEOREMA

42. *Si corpus, quod in canali AM* (Fig. 3, p. 16) *movetur, in M sollicitetur a potentia, cuius directio sit secundum tangentem MT, huius effectus in hoc consistet, ut celeritatem corporis vel augeat vel diminuat eodem modo quo in motu libero.*

DEMONSTRATIO

Quia huius potentiae directio est ipsa canalis tangens MT, canalis effectum huius potentiae impedire non potest; neque etiam in canalem haec potentia ullum effectum exercere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conspirans vel contraria fuerit, prorsus ac si corpus libere moveretur. Atque posita altitudine celeritati in M debita $=v$, elemento $Mm=ds$ et vi $MT=T$, erit $dv=Tds$ accelerante potentia T; at retardante ea erit $dv=-Tds$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

43. In motu corporum igitur super lineis datis vis normalis pressionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

COROLLARIUM 2

44. Cum vis resistentiae effectum vis tangentialis retardantis praestet, eodem quoque modo aget in motum corporum super datis lineis ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit resistentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = Tds - Rds$.

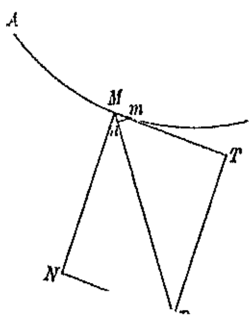
PROPOSITIO 5

PROBLEMA

45. *Si corpus super linea data AM (Fig. 4) moveatur in medio quocunque resistente et insuper sollicitetur a potentia absoluta, cuius directio sit MP, determinare effectum tam potentiae absolutae quam resistentiae nec non pressionem, quam curva AM sustinet.*

SOLUTIO

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis resistentiae $= R$ et vis absoluta $MP = P$, cuius directio sit talis, ut sumto elemento $Mm = ds$ sit



perpendiculum mn ex m in MP demissum $= dx$ et $Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Resolvatur potentia P in has duas secundum MN normalem in curvam et MT tangentem trahentes; erit ob triangula MPT et Mmn similia vis normalis MN seu $PT = \frac{Pdx}{ds}$ et vis tangentialis $MT = \frac{Pdy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis resistentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab excessu $\frac{Pdy}{ds} - R$; hanc ob rem erit (§ 42)

$$dv = Pdy - Rds.$$

ɔfficit, ut curva in M tantundem prematur secundum
ʼexam curvae partem sitam. Quare, cum vis centri-
ırgeat, quae est $= \frac{2v}{r}$ designante r radium osculi

in M, erit vis totalis, qua curva in M secundum MN premitur,

$$= \frac{P\,dx}{ds} + \frac{2v}{r}.$$

Unde tum motus corporis super curva tum curvae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

SCHOLION 1

47. Hic quidem unicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas, normalem nempe et tangentialem, sunt resolvendae, ex quibus colligendis una vis normalis unaque tangentialis oritur; quarum effectus per propositiones 3 et 4 determinari poterunt.

SCHOLION 2

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit, ut paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci poterit propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, uti primum a Hugenio factum est[1]); quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.

---

1) Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Paris 1673; *Opera varia*, Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 89.
P. St.

PROPOSITIO 6

PROBLEMA

49. *Ope penduli efficere, ut corpus in data linea moveatur.*

CONSTRUCTIO

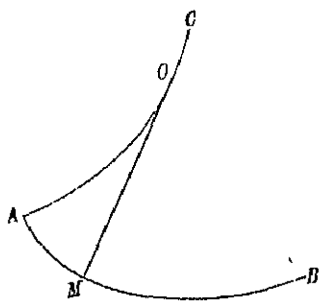


Fig. 5.

Sit AMB (Fig. 5) curva proposita, in qua corpus moveri debeat; huius curvae construatur evoluta AOC laminaque secundum eius figuram incurvetur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus movendum. Quando igitur corpus moveri incipit, perspicuum est id in curva AMB moveri debere, quia filum, dum a lamina separatur, hanc curvam evolutione describit. Q. E. Fac.

COROLLARIUM 1

50. Hac igitur ratione corpus in data curva progreditur atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inveniuntur.

COROLLARIUM 2

51. Ex doctrina de evolutionibus intelligitur fili partem MO a lamina separatam in curvam AMB esse normalem ipsumque eius radium osculi.

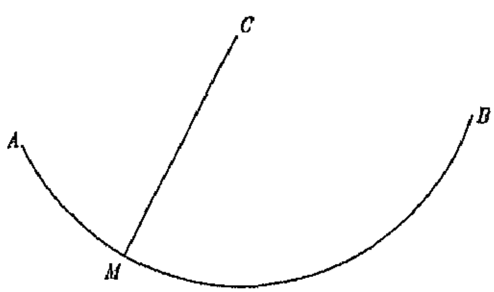


Fig. 6.

COROLLARIUM 3

52. Quo corpus in peripheria circuli AMB (Fig. 6) moveatur, lamina incurvata non est opus, sed filum altero termino C tantummodo in centro C peripheriae est figendum.

COROLLARIUM 4

53. Quia filum *MO* (Fig. 5, p. 20) est radius osculi, vis centrifuga tota ad tendendum hoc filum impendetur. Quare hoc filum tum satis roboris habere, tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpetuo longitudinem conservet, curvam desideratam non describet.

COROLLARIUM 5

54. Accedente potentia absoluta habebitur praeter vim centrifugam vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspirans. At si contraria fuerit, minuet tensionem fili, imo etiam, si maior fuerit, comprimet, quo casu evolutio nullius erit usus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit neque ideo impedire, quo minus corpus a curva *AMB* versus evolutam recedat.

SCHOLION 1

55. Praeter hanc difficultatem ista curvarum per evolutiones generatio hoc quoque laborat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam enim generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec evolutio ad curvas accommodari non potest, quae alicubi radium osculi habent infinite magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae curvae hoc modo describi possunt. Quamobrem ita praxis locum tantum habet in curvis ubique finitam curvaturam habentibus, ad quod addi debet, ut pressio curvae totalis nusquam in curvae concavam partem dirigatur.

SCHOLION 2

56. HUGENIUS, qui primus evolutionis doctrinam excoluit, statim eam ad hunc ipsum usum adhibuit, uti ex eius egregio opere de horologio oscillatorio apparet. Cum enim invenisset oscillationes super cycloide omnes esse isochronas, motum super cycloide in horologia inferre volebat, quod per pendulum intra cycloides oscillans effecit. Cum enim cycloidis evoluta sit cyclois, hac ratione obtinuit, ut corpus filo annexum in cycloide moveretur.

SCHOLION 3

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari convenit praeter corpus motum filum quoque moveri debere, id quod ad institutum huius libri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praeterea motus corporis pendulo annexi non est sibi parallelus, sed circularis, circa centrum scilicet circuli curvam osculantis, qui motus pariter hoc loco non attingitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel superficie data examini subiiciemus mentemque tam a motu fili quam a motu circulari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, ubi et motus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tantum reducemus, ita ut haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in praxi usum sint habitura. Quamobrem, ut iam monuimus, punctum motu sibi semper parallelo super curva seu superficie sine ulla frictione ferri est concipiendum.

PROPOSITIO 7

THEOREMA

58. *Si corpus a nullis potentiis sollicitatum moveatur in vacuo seu medio non resistente super superficie quacunque ABC* (Fig. 7), *motu feretur uniformi, animum ab omni frictione abstrahendo.*

DEMONSTRATIO

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, multo magis super superficie data moveri poterit, eo, quod eius libertas minus est restricta. Sit igitur DMm linea, in qua corpus progreditur; haec erit vel recta vel curva. Si ista linea fuerit recta, dubium non est, quin corpus motu aequabili sit progressurum. Sin autem fuerit curva, quae aequatione exprimi potest, duo quaeque eius elementa contigua vel proxime in directum erunt sita vel angulum infinite acutum constituent, quod in cuspidibus accidit. Illo casu supra demonstratum est corpus nullum motus decrementum pati (§ 12). In cuspidibus vero corpus quidem

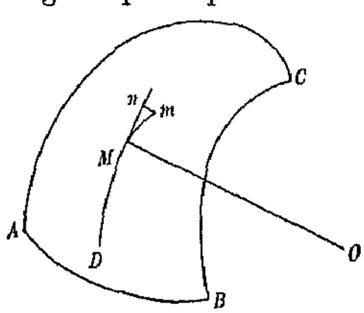


Fig. 7.

omnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem, si motus tantum fiat in curva vel parte curvae cuspidibus carente, motus corporis erit aequabilis. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem mutare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequivalet ideoque, etiamsi integretur, decrementum tamen infinite parvum producit.

COROLLARIUM 2

60. Si scilicet corporis celeritas fuerit c et radius osculi $MO = r$, erit decrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit, $= \frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (§ 12).

SCHOLION

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonstratione primae propositionis neque aliud est discrimen, nisi quod corpus illo casu in data linea moveri cogatur, hoc vero casu super superficie data viam quaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae circa primam propositionem sunt factae, hic quoque valent. Videbimus ergo, quamnam viam corpus in superficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8

THEOREMA

62. *Via DMm (Fig. 7, p. 22), quam corpus super superficie quacunque ABC motum describit, est linea brevissima, quae inter terminos D et M duci potest, si scilicet corpus in vacuo moveatur et a nullis potentiis sollicitetur.*

DEMONSTRATIO

Descripserit corpus iam curvam DM; manifestum est corpus ex M in tangente Mn esse progressurum, nisi in superficie perseverare cogeretur. Quia igitur motus per Mn fieri non potest, resolvatur is in duos laterales, quorum alter in ipsa superficie sit dispositus, alterius vero directio in super-

ficiem sit perpendicularis atque ideo penitus non in effectum deduci possit. Hanc ob rem ex n in superficiem demittatur perpendiculum nm; erit recta Mm elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum ergo nMm, in quo posita sunt et elementum mM et id, quod a corpore immediate ante est descriptum, erit normale in superficiem. At linea brevissima in quavis *superficie ducta hanc habet proprietatem, ut planum, in quo posita sunt duo* quaeque elementa contigua, sit in superficiem normale. Quamobrem linea DMm, quae a corpore describitur, est linea brevissima in superficie ABC. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea brevissima in superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habebitur via, qua corpus motu uniformi movebitur.

COROLLARIUM 2

64. Quia filum tensum in superficie lineam brevissimam designat, ostendet filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie movetur.

COROLLARIUM 3

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus lineam rectam describet, quia haec in plano est linea brevissima. Atque in superficie sphaerica corpus in circulo maximo movebitur.

COROLLARIUM 4

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curvae DMm elementa contigua, normale est in superficiem, radius osculi curvae vero in eodem plano sit positus et in curvam normalis, erit radius osculi curvae descriptae MO normalis in superficiem.

SCHOLION

67. Quemadmodum in quavis superficie linea brevissima sit invenienda, a me primum ostensum est in Tomo III Comment. Acad. Imp. Petrop.[1])

1) L. EULERI Commentatio 9 (indicis ENESTROEMIANI): *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, Comment. acad. sc. Petrop. 3 (1728), 1732, p. 110; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 25. P. St.

Cum autem ibi ex alio principio lineam brevissimam determinaverim atque haec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam hanc brevissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare constitui.

PROPOSITIO 9

PROBLEMA

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum, quod super ea movetur, describit.*

SOLUTIO

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio planum APQ fixum (Fig. 8) in eoque recta AP pro axe. Tum ex quovis superficiei puncto M demittatur in hoc planum perpendiculum MQ et ex Q in axem AP perpendicularis QP. Positis nunc $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ natura superficiei dabitur per aequationem inter has tres variabiles x, y et z et constantes. Sit huius aequationis differentialis

$$dz = Pdx + Qdy,$$

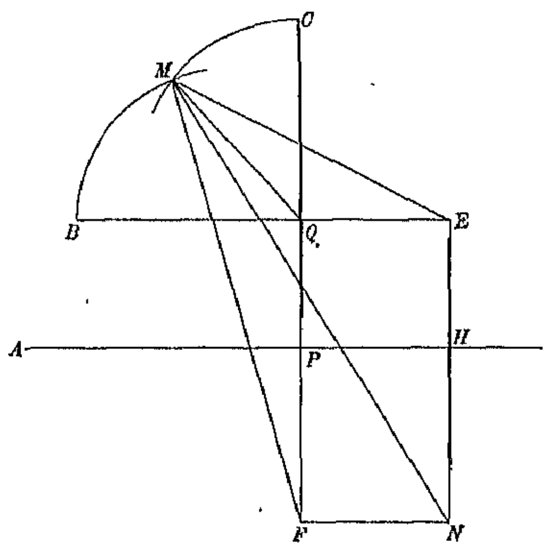


Fig. 8.

ex qua linea brevissima in hac superficie seu linea, quam corpus describit, determinari debet. Haec linea vero ex hoc determinatur, quod eius radius osculi in ipsam superficiei normalem incidat. Quamobrem primo normalem superficiei et deinde cuiusque in ea ductae curvae radium osculi determinabimus, quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quaesitae possit concludi.

Ad normalem in superficiem inveniendam secetur primo superficies plano MQB, existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP, prodeatque ex hac sectione curva BM; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$,

quae ex locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur posita y constante seu $dy = 0$. Ducatur ad hanc curvam BM normalis ME rectae BQ productae in E occurrens; erit subnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc EN perpendiculari ad BE quaevis recta MN a M ad NE ducta normalis erit in curvam BM. Simili modo superficies secetur plano PQM prodeatque sectio CM, cuius natura exprimetur aequatione inter z et y manente x constante, quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curvam; erit subnormalis $QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$; signo negativo utor, quia subnormalem QF versus P cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP quaevis recta ex M ad FN ducta normalis erit in curvam CM. Recta MN ergo, quae in punctum intersectionis N rectarum FN et EN cadit, perpendicularis in utramque curvam BM et CM et hanc ob rem perpendicularis erit in superficiem. Locus ergo normalis invenitur sumendo

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y.$$

Ad determinandam vero radii osculi cuiusvis curvae in superficie data ductae positionem sint duo curvae elementa Mm et $m\mu$ (Fig. 9), quibus

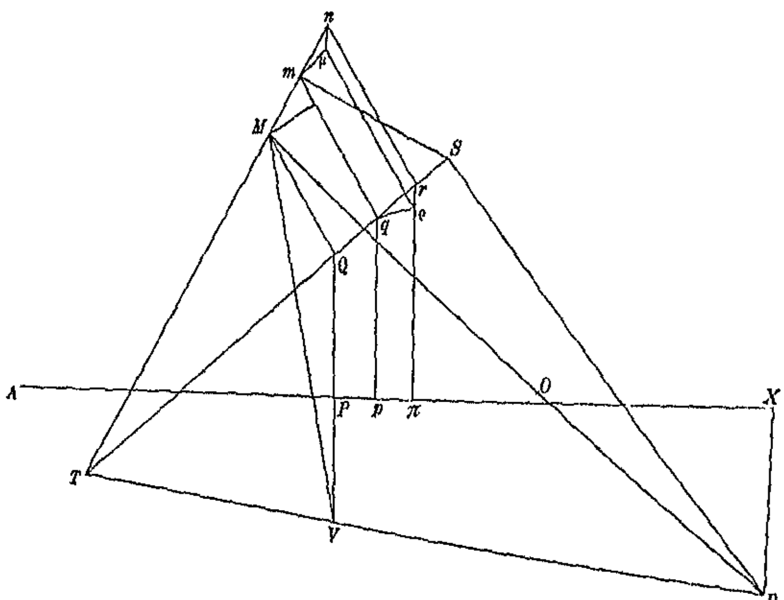


Fig. 9.

respondeant in plano APQ elementa Qq, $q\varrho$ atque in axe AP assumto elementa Pp, $p\pi$, quae sint aequalia. Erit ergo

$$Pp = p\pi = dx,\quad pq = y + dy,\quad \pi\varrho = y + 2dy + ddy,\quad Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

$$q\varrho = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}},$$

$$qm = z + dz,\quad \varrho\mu = z + 2dz + ddz,\quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

et

$$m\mu = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Producantur Qq et Mm utrinque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in r, haec vero ipsi rn normali in planum APQ in n occurrat, eritque ob $Pp = p\pi$

$$qr = Qq \quad \text{et} \quad mn = Mm \quad \text{atque} \quad \pi r = y + 2dy \quad \text{ac} \quad rn = z + 2dz.$$

Iam ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi Qq productae in S; erit

$$QS = \frac{(qm - QM)\,QM}{Qq} = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS omnes rectae ex m ad SR ductae normales erunt ad elementum Mm. In his igitur normalibus erit radius osculi curvae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano sunt elementa mn et $n\mu$; ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ. At nm vel mM occurrit plano APQ in T, ubi cum elemento Qq producto concurrit. Est igitur

$$QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}.$$

Ipsi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ erit sita; haec vero MV in planum APQ incidet in V dabiturque QV ex analogia hac

$$(rn - \varrho\mu) : r\varrho = QM : QV;$$

erit itaque

$$QV = \frac{zddy}{ddz}.$$

Hanc ob rem recta TV producta erit intersectio plani $nm\mu$ cum plano APQ, quare recta MR, quae in concursum rectarum SR et TV est ducta, erit simul normalis in Mm et posita in plano $nm\mu$ eritque propterea MR po-

sitio radii osculi curvae in M. Ex his punctum R hoc modo determinabitur: erit, ducta RX perpendiculari in AP productam,

$$AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dydzddy} + x$$

atque

$$XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dydzddy} - y.$$

Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curvae directionem incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; unde erit

$$P(dx^2+dy^2)ddz - Pdydzddy = dxdyddy + dxdzddz$$

et

$$-Q(dx^2+dy^2)ddz + Qdydzddy = dx^2ddy + dz^2ddy - dzdyddz.$$

Quae quidem aequationes inter se congruunt; fiet enim ex iis coniunctim

$$Pdx + Qdy = dz,$$

quae est ipsa aequatio naturam superficiei exponens. Harum igitur aequationum alterutra cum hac $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta dabit curvam a corpore in proposita superficie percursam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

69. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta

$$ddz : ddy = Pdydz + dxdy : Pdx^2 + Pdy^2 - dxdz.$$

At quia est $dz = Pdx + Qdy$, erit

$$ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$$

seu

$$Pdyddz - Qdxddz = Pdzddy + dxddy.$$

COROLLARIUM 2

70. Si assumatur altera aequatio et utrinque subtrahatur

$$Qdz^2ddz - dy^2ddy,$$

habebitur

$$-Q(dx^2+dy^2+dz^2)ddz+Qdydzddy+dy^2ddy$$
$$=(dx^2+dy^2+dz^2)ddy-Qdz^2ddz-dzdyddz.$$

Unde habetur

$$\frac{ddy+Qddz}{dy+Qdz}=\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Quae est illa ipsa aequatio, quam pro linea brevissima in quacunque superficie dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

SCHOLION 1

71. Ut in hoc casu, quo corpus a nulla potentia sollicitatur, directio radii osculi cum normali in superficiem congruere debet, ita in aliis casibus, quando corpus sollicitatur a potentiis, hae lineae datum angulum constituere

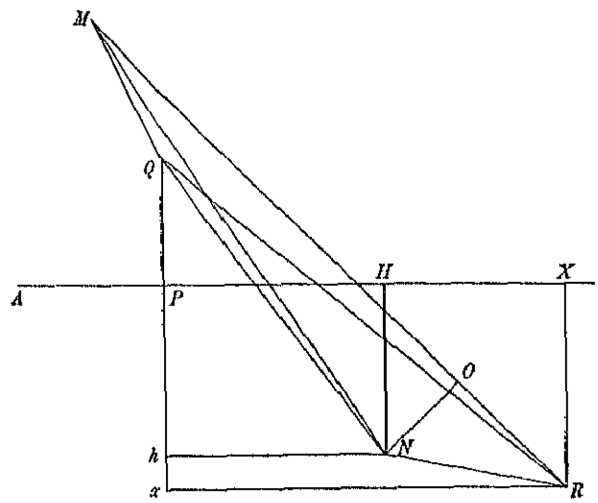


Fig. 10.

debent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inveniendum sit MN (Fig. 10) normalis in superficiem et MR directio radii osculi; erit, ut iam vel posuimus vel invenimus,

$$PQ=y,\quad QM=z,\quad PH=hN=Pz,\quad Qh=-Qz,$$

$$PX=Rx=\frac{zdx(dyddy+dzddz)}{(dx^2+dy^2)ddz-dydzddy}$$

et

$$Qx=\frac{zdx^2ddy+zdz(dzddy-dyddz)}{(dx^2+dy^2)ddz-dydzddy}.$$

Ducta NR ex N in MR demittatur perpendiculum NO; erit

$$MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx\cdot Nh + Qx\cdot Qh}{MR}$$

et

$$NO = \frac{\sqrt{(MR^2\cdot MN^2 - (MQ^2 + Rx\cdot Nh + Qx\cdot Qh)^2)}}{MR}$$

$$= \frac{\sqrt{(MQ^2(Qx - Qh)^2 + MQ^2(Rx - Nh)^2 + (Rx\cdot Qh - Qx\cdot Nh)^2)}}{MR}.$$

Anguli vero RMN tangens est $= \frac{NO}{MO}$ posito sinu toto $= 1$. Substitutis autem supra assumtis symbolis et in subsidium vocata aequatione

$$dz = Pdx + Qdy$$

prodibit tangens anguli NMR

$$= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Hoc ergo angulo evanescente fit

$$ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$$

ut supra (§ 69).

SCHOLION 2

72. Ipsa vero radii osculi longitudo MO (Fig. 9, p. 26) invenitur ex angulo $nm\mu$ ope huius analogiae: ut sinus anguli $nm\mu$ ad sinum totum, ita Mm ad MO. Est vero

$$n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)} \quad \text{et} \quad mn = m\mu = \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}},$$

ergo perpendiculum ex n in $m\mu$ productum

$$= \frac{\sqrt{(dx^2ddy^2 + dz^2ddy^2 + dx^2ddz^2 + dy^2ddz^2 - 2dydzddyddz)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Quare hoc perpendiculum est ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ad MO, unde prodit radius osculi

$$MO = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}.$$

Hoc autem radio osculi opus erit in sequente propositione, in qua pressionem, quam corpus in superficiem exercet, investigabimus.

SCHOLION 3

73. Ex hac generali radii osculi expressione orietur ea pro radio osculi lineae brevissimae, si coniungatur cum hac aequatione

$$ddz = \frac{ddy\,(Pdz + dx)}{Pdy - Qdx} \quad \text{et locali} \quad dz = Pdx + Qdy.$$

Prodibit autem radius osculi

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(Pdy - Qdx)}{dx\,ddy\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{ddz - Qddy}$$
$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{dPdx + dQdy}.$$

Atque haec expressio dat radium osculi curvae in superficie proposita descriptae a corpore a nullis potentiis sollicitato.

PROPOSITIO 10

THEOREMA

74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum in ipsam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius convexitatem et se habet ad vim gravitatis ut altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radii osculi curvae a corpore descriptae.*

DEMONSTRATIO

Sit DMm (Fig. 7, p. 22) curva in superficie ABC a corpore descripta, altitudo celeritati corporis debita $= v$ et radius osculi curvae $MO = r$. Quia corpus ex M, si libere moveri posset, progrederetur in elemento Mn, super-

ficies vero efficit, ut per elementum Mm incedat existente nm perpendiculo in superficiem, superficies a corpore secundum directionem nm premetur tanta vi, quanta opus est ad corpus ex directione Mn in directionem Mm portrahendum. Hoc vero praestatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in superficiem seu secundum directionem radii osculi MO agente. Quamobrem pressio corporis in superficiem erit normalis, quippe agens secundum mn, et aequalis $\frac{2v}{r}$ existente vi gravitatis corporis $=1$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

75. Haec est igitur vis centrifuga, quam corpus in superficiem simili modo exercet, quo in lineam datam, in qua moveri cogitur.

SCHOLION 1

76. Pressio in superficiem necessario debet esse normalis. Nam nisi esset normalis, resolvi posset in duas, quarum altera esset normalis, altera in ipsa superficie posita. Harum vero normalis tantum ad premendam superficiem impenditur, dum altera ipsum corporis motum immutaret.

COROLLARIUM 2

77. Longitudinem radii osculi r lineae, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum super proposita superficie describit, invenimus § 73. Ea igitur assumta erit vis centrifuga

$$= \frac{2v(ddz - Qddy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} = \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}.$$

SCHOLION 2

78. De hac vi centrifuga in superficiem exercita eadem locum habent, quae supra de vi centrifuga in datam curvam sunt annotata; vide prop. 2 § 20 cum annexis coroll. et schol. Linea enim brevissima, quam corpus super superficie percurrit, instar canalis considerari potest, in quo corpus moveatur, atque tum de motu in hoc canali omnia valent, quae supra de motu super data linea nullis agentibus potentiis sunt allata.

PROPOSITIO 11

PROBLEMA

79. *Determinare effectum cuiusvis potentiae, quem exerit in corpus super data superficie motum tam in vacuo quam in medio resistente.*

SOLUTIO

Quaecunque sit directio potentiae sollicitantis corpus, ea resolvi potest in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio normalis in superficiem, secundae, quam per N designabimus, directio normalis tam in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cuius igitur directio erit in plano tangente superficiem, tertiae potentiae T appellatae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis; priores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones sunt inter se normales, nullius effectus a reliquis perturbari poterit. Quare, quem effectum quaeque producat, investigabimus.

Prima potentia M, cuius directio in superficiem est normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu, sed tota impendetur in pressionem superficiei. Augebit igitur vel diminuet pressionem a vi centrifuga ortam, prout eius directio in plagam convexae partis superficiei incidit vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem; erit totalis pressio in superficiem versus partes exteriores

$$=\frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}-M$$

(§ 77). Pressio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc casu potentia M.

Secunda potentia N, quia eius directio in ipsa superficie est posita et normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutabit celeritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a linea brevissima deducet facietque, ut non amplius in plano ad superficiem normali moveatur; huius igitur plani, in quo corpus movebitur, inclinationem ad planum lineae brevissimae normale in superficiem investigari oportet. Huius vero inclinationis angulo aequalis est angulus, quem radius osculi lineae descriptae cum normali in curvam constituit quemque ante generaliter deter-

minavimus (§ 71). Postquam corpus elementum Mm celeritate altitudini v debita descripsit, progrederetur, nisi a vi N sollicitaretur, per elementum $m\nu$ (Fig. 11) in ν, ita ut Mm et $m\nu$ essent duo elementa lineae brevissimae et posita in plano ad superficiem normali; erit directio vis N normalis in planum chartae, sit ea $\nu\mu$; corpus igitur hac vi a plano chartae sursum reducetur, si quidem ponamus hanc vim N sursum esse directam hac elementorum positione, ut in figura repraesentatur. Efficiat ergo haec vis, ut corpus per elementum $m\mu$ moveatur anguloque $\nu m\mu$ a directione $m\nu$ deflectat. Huic angulo respondet radius osculi $=\frac{m\nu^2}{\mu\nu}$. Quare cum vis N hunc angulum generet celeritasque curvae debita sit altitudini v, erit ex effectu virium normalium

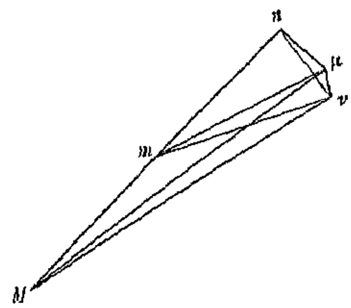


Fig. 11.

$$N=\frac{2v\cdot\mu\nu}{m\nu^2}\quad\text{ideoque}\quad\mu\nu=\frac{N\cdot m\nu^2}{2v}.$$

Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu movebitur, ad planum $Mm\nu$, quod in superficiem est normale, inveniatur, demittatur ex ν in elementum Mm productum perpendiculum νn; erit μn quoque in mn perpendiculare ideoque angulus $\mu n\nu$ erit angulus inclinationis plani μmM ad planum νmM; atque cum $\mu\nu$ sit normalis ad νn, huius anguli tangens erit $=\frac{\mu\nu}{n\nu}=\frac{N\cdot m\nu^2}{2v\cdot n\nu}$. At $n\nu$ determinatur ex inclinatione elementorum Mm et $m\nu$ seu radio osculi lineae brevissimae, cuius Mm et $m\nu$ sunt elementa. Sit hic radius osculi r, erit $\frac{m\nu^2}{n\nu}=r$ ideoque tangens anguli $\mu n\nu$

$$=\frac{Nr}{2v}=\frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$$

substituto loco r valore invento (§ 73). Huic vero angulo aequalis est angulus, quem radius osculi elementorum Mm, $m\mu$ a corpore actu descriptorum constituit cum radio osculi elementorum Mm, $m\nu$ seu cum normali in superficiem. Huius autem anguli tangentem supra invenimus (§ 71). Quare facta aequatione habebimus

$$\frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddz-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}=\frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)},$$

qua aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum sit

$$ddz - Qddy = dPdx + dQdy,$$

habebitur ista aequatio

$$ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v}.$$

Tertia potentia T, quia in directione corporis est posita, celeritatem tantum vel auget vel diminuit. Ponamus eam esse accelerantem, exprimetur eius effectus hac aequatione

$$dv = T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Atque si motus in medio fiat resistente resistentiaque sit $= R$, minuenda tantum est vis tangentialis T resistentia R. Quamobrem habebitur

$$dv = (T - R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v, altera dv determinat, una conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta determinat curvam, quam corpus super proposita superficie describit.

SCHOLION 1

81. De potentia N bene est attendendum, in quam plagam tendat, h. e. an ad dextram an ad sinistram regionem corporis moti vergat. Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmativa vel negativa est accipienda. De hoc vero non erimus hic solliciti, sed ulteriorem huius rei disquisitionem in caput ultimum huius libri differemus.

SCHOLION 2

82. Ad sequens igitur caput secundum progredimur, in quo motum corporis super data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus super data linea in medio resistente investigabimus. Quarto denique capite motum super data superficie tam in vacuo quam in medio resistente scrutabimur.

CAPUT SECUNDUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN VACUO

PROPOSITIO 12

PROBLEMA

83. *Sollicitetur corpus, quod super curva AM* (Fig. 12) *movetur, ubique a potentia MF, cuius directio sit parallela axi AP; determinare celeritatem corporis in singulis punctis atque tempus, quo curvae quaevis portio describitur, nec non pressionem, quam curva in singulis punctis patitur.*

SOLUTIO

Descripserit corpus iam arcum AM sitque eius celeritas in A debita altitudini b atque celeritas in M debita altitudini v. Positis nunc $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$ resolvatur potentia MF, quae sit p, in laterales, normalem scilicet MN et tangentialem MT; erit

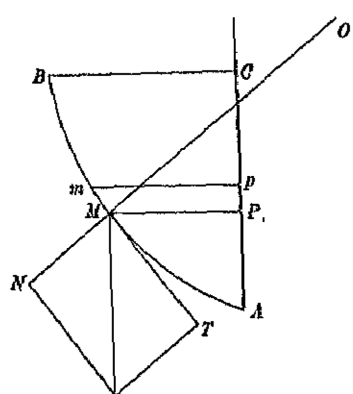


Fig. 12.

$$ds : dx = MF : MT \quad \text{et} \quad ds : dy = MF : MN.$$

Hinc igitur prodibit vis tangentialis $MT = \frac{pdx}{ds}$ et vis normalis $MN = \frac{pdy}{ds}$. Perspicuum hic est vim tangentialem celeritatem corporis minuere; erit ergo

$$dv = -pdx \quad \text{atque} \quad v = C - \int pdx$$

(§ 42). Sumto autem integrali $\int pdx$ ita, ut evanescat posito $x = 0$, erit

$$v = b - \int pdx;$$

ex qua aequatione corporis coleritas in singulis punctis cognoscitur. Ex eadem aequatione innotescit quoque tempus, quo arcus AM absolvitur; posito enim tempore t erit

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int p\,dx)}}.$$

Vis normalis $MN = \frac{p\,dy}{ds}$ tota impenditur in curvae pressionem secundum MN (§ 39), augebit ergo pressionem a vi centrifuga ortam, quia MN in oppositam radii osculi MO plagam cadit. Quare, cum posito radio osculi $MO = r$ vis centrifuga sit $= \frac{2v}{r}$ (§ 20), erit totalis pressio in curvam iuxta $MN = \frac{p\,dy}{ds} + \frac{2v}{r}$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

84. Celeritas in M igitur tanta est, quanta foret in P, si corpus eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ per AP eadem in singulis altitudinibus potentia p sollicitatum ascendisset.

COROLLARIUM 2

85. Celeritas igitur non pendet a natura curvae, sed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit dx, erit $dv = -p\,dx$ vel $dv = p\,dx$, prout corpus vel ascendit vel descendit.

COROLLARIUM 3

86. Cum sit $v = b - \int p\,dx$, si sumatur abscissa x tanta uti AC, pro qua sit $\int p\,dx = b$, erit corporis in illa altitudine B celeritas $= 0$. Corpus igitur in B usque ascendit ibique quiescet; continuo vero ex B descendet per BMA.

COROLLARIUM 4

87. Si ascensus per AMB cum ascensu rectilineo per APC comparetur, erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp ut Mm ad Pp, i. e. ut ds ad dx.

COROLLARIUM 5

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp constantem erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione, nempe ea, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A, seu quam habet longitudo AB ad AC.

COROLLARIUM 6

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi

$$r = \frac{-ds^3}{dxddy}$$

ideoque vis centrifuga

$$= -\frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{-2(b - \int pdx)dxddy}{ds^3}.$$

Quare pressio totalis erit

$$= \frac{pds^2dy - 2(b - \int pdx)dxddy}{ds^3}.$$

SCHOLION 1

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curva et potentia sollicitante inventa sunt celeritas in singulis punctis, tempus per quemvis arcum et pressio in singula curvae puncta, ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis reliquae tres possunt inveniri. Ex quo decem nascentur problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebunt.

SCHOLION 2

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directiones potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel convergentes ad centrum virium vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam directio inter quaesita ponatur, tunc ob sex res in computum ducendas ex ternis quibusque reliquae tres invenientur; hincque viginti orientur problemata.

SCHOLION 3

92. Orientur porro problemata indeterminata, ut si loco temporis per quamvis curvae portionem tantum integrum tempus per AMB daretur; tum

enim infinitae solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus vel ascensus integri considerentur super eiusdem curvae variis partibus eorumque ratio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc genus pertinet quaestio de invenienda curva, super qua omnes descensus ad datum punctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas ultimo pertractabimus. Nunc autem primum curvam et potentiam sollicitantem tanquam datas accipiemus et problemata eo pertinentia solvemus. Deinceps vero ex aliis datis quemadmodum reliqua sint invenienda, monstrabimus.

PROPOSITIO 13

PROBLEMA

93. *Si potentia sollicitans fuerit uniformis et ubique deorsum tendat, determinare descensum corporis super data curva AM* (Fig. 13) *in A ex quiete incipientem atque pressionem, quam curva in singulis punctis M sustinet.*

SOLUTIO

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF atque applicata rectangula MP sit $AP = x$, $PM = y$, curva $AM = s$. Ponatur potentia $MF = g$ existente vi gravitatis $= 1$ et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{gdx}{ds}$ (§ 83). Quia hoc casu vis tangentialis accelerat, erit $dv = gdx$ et

$$v = gx$$

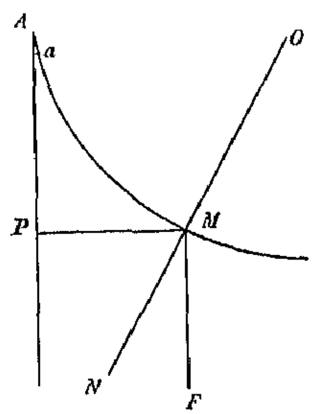


Fig. 13.

ob celeritatem in $A = 0$. Deinde quia radius osculi in MO directus est $= \frac{+ds^3}{dxddy}$ posito dx constante, erit vis centrifuga $= \frac{+2vdxddy}{ds^3}$, cuius directio est MN. Secundum eandem plagam vero premit vis normalis $\frac{gdy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curva in M sustinet secundum MN, est

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2gxdxddy}{ds^3}$$

ob $v = gx$. Tempus vero, quo corpus arcum AM percurrit, est $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per quam descendit, pendet atque tanta est, quantam idem corpus ex A in P delapsum et ab eadem potentia g sollicitatum acquirit.

COROLLARIUM 2

95. In quacunque igitur curva corpus a potentia uniformi g sollicitatum ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus percursis proportionales; est enim celeritas ut $\sqrt{v}$, i. e. ut $\sqrt{gx}$.

COROLLARIUM 3

96. Tempus, quo primum elementum Aa percurritur, est $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ evanescente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s = nx$, erit tempus per Aa infinite parvum ideoque tempus AM finitum, nisi curva vel ascendat inter A et M supra A vel in infinitum progrediatur. At si angulus PAa fuerit rectus, erit ipso puncto A $s^n = \alpha x$ existente n numero unitate maiore ideoque

$$\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2s^{\frac{2-n}{2}}}{2-n} \sqrt{\frac{\alpha}{g}}.$$

Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite parvum et tempus per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2, tempus per primum elementum Aa erit infinite magnum seu corpus ex A nunquam egredietur.

COROLLARIUM 4

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est infinite parvus. Quare in casu, quo tangens curvae in A ad AP est normalis, corpus non descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite parvus.

SCHOLION 1

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite parvo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM esse finitum; cum enim corpus motu accelerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describentur et hanc ob rem tempus debebit esse finitum. Exemplis autem sequentibus omnia illustrabuntur.

EXEMPLUM 1

99. Sit linea AM (Fig. 14) recta utcunque inclinata ad verticalem AP atque cosinus ang. $A = n$; erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM descendit, erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2AM}{\sqrt{g \cdot AP}}$$

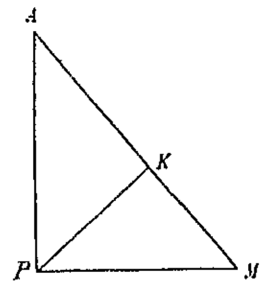


Fig. 14.

seu tempus per lineam utcunque inclinatam est directe ut radix ex ipsa linea et inverse ut radix ex cosinu anguli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem $= 0$, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae est

$$= g\sqrt{(1-n^2)} = \frac{g \cdot PM}{AM}.$$

COROLLARIUM 5

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK ut $\sqrt{AM}$ ad $\sqrt{AK}$. At tempus per AM est ad tempus per AP ut AM ad AP (§ 88). Quare si fuerit $AM : AP = \sqrt{AM} : \sqrt{AK}$ seu $AM : AP = AP : AK$, quod evenit, si PK est in AM perpendicularis, tum tempus descensus per AK aequale est tempori descensus per AP.

COROLLARIUM 6

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale esse tempori descensus per AP. Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$. Quare, cum sit tempus per AP ad tempus per KP ut $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{1}}$ ad $\sqrt{KP} : \sqrt{\frac{PK}{AP}}$, erit haec ratio aequalitatis.

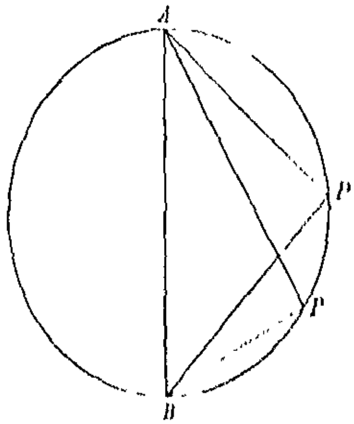


Fig. 15

COROLLARIUM [illegible]

102. Ex hoc [illegible] $APPB$ (Fig. 15) [illegible] per chordas AP ex puncto [illegible] A [illegible] nec non [illegible] ad punctum infimum B [illegible] fieri temporibus, [illegible] corpus per diametrum AB [illegible] riter delabitur.

EXEMPLUM 2

103. Si curva AMB (Fig. 16) fuerit circulus [illegible] BC [illegible] AP tangat circulum, erit

$$(a - y)^2 + x^2 = a^2 \quad \text{seu} \quad y = a - \sqrt{a^2 - [illegible]}$$

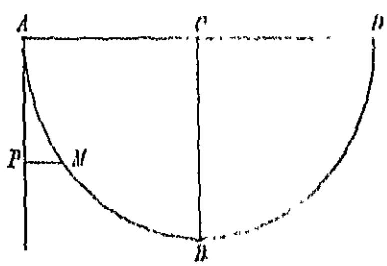


Fig. 16.

Habebitur ergo [illegible] et $r = a$ erit [illegible]

atque ob dy [illegible] circulus in M [illegible],

Triplo igitur maior est tota pressio quam sola vis normalis.

Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

$$\int \frac{a\,dx}{\sqrt{[illegible]}}$$

cuius integratio neque a circuli nec hyperbolae quadratura pendet [illegible] rectificationis curvae elasticae construi potest. Tempus [illegible] quadrantem AB est

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{[illegible]\,13} + \text{etc.}\right)$$

COROLLARIUM 8

104. Cum corpus ad infimum punctum B pervenerit, ibi habebit celeritatem altitudini ga debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD pertingetque ad D, ubi eius celeritas evanescet, ideoque rursus descendet ad B tumque ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui per quadrantem, quia corpus, sive ascendat sive descendat, in iisdem punctis eandem habet celeritatem.

SCHOLION 2

105. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, ubi plures descensus ad punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus allaturi. Nunc vero primum eas quaestiones evolvemus, quae pertinent ad motum super data linea ex dato puncto fixo a quiete inceptum, cuius modi est problema sequens.

PROPOSITIO 14

PROBLEMA

106. *Si fuerint infinitae curvae similes AM, AM etc.* (Fig. 17) *ex puncto fixo A initium sumentes, invenire curvam CMM ab illis curvis arcus AM, AM etc. abscindentem, qui a descendente super iis corpore aequalibus temporibus percurrantur existente ut ante potentia sollicitante uniformi et ubique deorsum directa.*

SOLUTIO

Ex infinitis curvis datis sumatur una quaecunque AM, cuius parameter sit a. Positoque $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$ et existente ut ante potentia sollicitante $= g$ descendat corpus super curva AM; erit celeritas in M debita altitudini gx. Tempus ergo descensus super AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}.$$

Ab omnibus ergo curvis AM, AM etc. tanti arcus

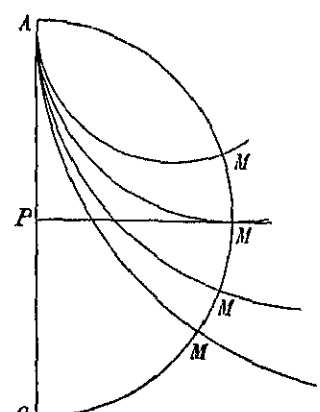


Fig. 17.

6*

sunt abscindendi, ut pro iis sit $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas constans. At $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ad alias curvas referetur, si praeter s et x etiam parameter a ponatur variabilis. Posito igitur in $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili quantitas $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ponenda est aequalis constanti, nempe ei tempori, quo omnes descensus fieri debent. Sit hoc tempus $= k$, erit

$$k = \int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$$

in singulis curvis. Quare si $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur, ut etiam a variabilis ponatur, hoc differentiale nihilo aequale est ponendum. Ad hoc differentiale inveniendum sit $ds = pdx$ eritque p, quia omnes curvae ponuntur similes, functio, in qua a et x nullum dimensionum numerum simul constituunt. Habebimus ergo $\int\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; hoc differentiatum posito quoque a variabili dabit

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda,$$

quod fieri debet $= 0$. Quantitas q vero sequenti modo invenietur. Quia est $k = \int\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$, in quantitate k variabiles a et x dimensionum numerum constituent $\frac{1}{2}$. Ostendi autem alibi, in Tom. VII Comment.[1]), tum fore

$$\frac{px}{\sqrt{gx}} + qa = \frac{k}{2}.$$

Ex quo invenitur

$$q = \frac{k}{2a} - \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}.$$

Habebitur ergo

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{kda}{2a} - \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = 0.$$

1) Editio princeps: *in Tom. IX Comment.* Dissertatio autem commemorata est L. Euleri Commentatio 44 (indicis Enestroemiani): *De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 22. Legitur p. 185 (Tom. VII Comment.): „Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x atque $du = Pdx + Qda$, erit $Px + Qa = mu$."

Eulerus hanc dissertationem anno 1734 Academiae exhibuerat, et quia pro quatuor annis 1726—1729 Tomi I—IV Commentariorum editi erant (annis 1728—1735), conveniens videtur fore, ut pro anno 1734 Tomus IX ederetur; id quod non evenit, quia pro sex annis 1730—1735 tres tantum Tomi V—VII editi sunt (annis 1738—1740). P. St.

quae est aequatio pro curva quaesita. At si aequatio inter coordinatas x et y pro curva CMM desideretur, ex aequatione pro quaque curvarum AM valor ipsius a in x et y inventus substitui debet. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

107. Aequatio etiam primo inventa

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{kda}{2a}$$

sufficit ad curvam CMM inveniendam. Nam pro quavis abscissa $AP = x$ ex ea invenitur a parameter eius curvae AM, cuius punctum M respondens assumtae abscissae x est in curva quaesita CMM.

COROLLARIUM 2

108. Cum autem haec aequatio sit differentialis ideoque ad plures curvas pro constante, quae adiicitur, pertineat, notandum est in additione constantis eam tantum solutioni esse convenientem, quae pro data curva seu pro dato ipsius a valore det abscissam x tantum arcum AM abscindentem, qui tempore k descensu absolvatur.

COROLLARIUM 3

109. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem $AC = b$, erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}.$$

In cuius integratione id est faciendum, ut curva per punctum C transeat.

SCHOLION 1

110. Erit autem semper recta verticalis AC species curvarum AM; quae oritur, si parameter a vel infinite magna vel infinite parva accipiatur. Quare commodissimo tempus constans k per descensum per verticalem AC, quippe

speciem curvarum AM, exprimitur. Atque in constructione aequationis inventae

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

tanta constans est addenda, ut posito $x = b$ fiat a vel infinitum vel nihil, prout ille vel iste valor ipsius a rectae AC respondeat.

SCHOLION 2

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione opus est, ad quam inveniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili, reipsa obtinetur q; atque hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commodissime vero his casibus problema solvetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi k vel $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$ aequale ponatur et loco a eius valor in x et y substituatur ex aequatione pro curvis datis. Atque hoc modo solutio in promtu est non solum pro curvis similibus, sed dissimilibus etiam, si modo tempora descensus per quantitates finitas exprimi possunt.

EXEMPLUM 1

112. Si omnes hae curvae AM fuerint rectae diversimode ad verticalem AC inclinatae, erit

$$y = nx \quad \text{et} \quad s = x\sqrt{(1+n^2)},$$

ubi n tanquam parameter est consideranda. Erit ergo

$$\int\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int\frac{dx\sqrt{(1+n^2)}}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x(1+n^2)}}{\sqrt{g}},$$

quod aequale poni debet ipsi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Erit itaque

$$x(1+n^2) = b.$$

Cum autem n sit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex aequatione

$y = nx$; quo facto prodibit pro curva CMM aequatio inter coordinatas orthogonales x et y ista

$$y^2 + x^2 = bx,$$

quae est pro circulo, cuius diameter est recta $AC = b$.

SCHOLION 3

113. Hic casus est ille ipse casus ante pertractatus (§ 102); ibi enim ostensum est corpus per omnes chordas in circulo ex puncto supremo eductas aequalibus temporibus descendere. Pertinet hic quidem casus non ad curvas similes; sed hoc exemplum attulimus ad casum scholii 2 illustrandum, quia pro rectis hisce tempora descensus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia exempla vero curvas similes, uti propositio postulat, complectentur.

EXEMPLUM 2

114. Sint curvae AM, AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A. Ponatur radius cuiusque eorum $= a$, erit

$$y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)} \quad \text{atque} \quad a = \frac{y^2 + x^2}{2y}.$$

Hi circuli vero omnes sunt curvae similes, quia a, y et x in aequatione eundem dimensionum numerum tenent seu homogeneitatem complent sola. Radius igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem ex illa aequatione

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

quare erit

$$p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

ideoque praescriptam habet proprietatem, ut a et x dimensionum numerus sit nullus. Hanc ob rem pro curva CMM haec habebitur aequatio

$$\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

seu haec

$$\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{xda - adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}}.$$

Quae aequatio construi potest; posito enim $x = au$ prodit

$$\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{-du}{\sqrt{(u-u^2)}},$$

in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. Quo autem aequatio inter coordinatas x et y pro curva CMM obtineatur, ponatur loco a valor $\frac{y^2+x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2dy+2yxdx-x^2dy}{2y^2}$. Quibus substitutis sequens prodit aequatio differentialis

$$-xdy+ydx = \frac{(y^2dy+2yxdx-x^2dy)\sqrt{bx}}{y^2+x^2}.$$

Quae ita integrari debet, ut posito $x = b$ fiat $y = 0$, quia curva per punctum C transire debet.

COROLLARIUM 4

115. Ex hac aequatione tangens curvae CMM in singulis punctis cognoscitur et ex positione tangentis innotescit angulus AMM, quo curva CMM quamlibet datarum intersecat. Erit scilicet tangens anguli AMM

$$= \frac{y}{x-\sqrt{bx}}.$$

Hic ergo angulus est rectus in C ob $x = b$, seu curva CMM in C ad AC est normalis.

COROLLARIUM 5

116. Si b vel maior vel minor accipiatur, curva CMM alia quoque erit hocque modo infinitae orientur curvae a circulis arcus isochronos abscindentes. Haeque curvae omnes inter se erunt similes ob parametrum b, quae in aequatione cum x et y homogeneitatem constituit. Data ergo una curva CMM innumerabiles aliae ex ea construi possunt, abscissis scilicet et applicatis curvae CMM in eadem ratione augendis vel diminuendis, in qua AC seu b augetur vel diminuitur.

EXEMPLUM 3

117. Sint curvae AM, AM omnes cycloides cuspides in A habentes et tangentes verticalem AC in A. Posita parametro cuiusque cycloidis AM

seu dupla diametro circuli generatoris $= a$ erit ex natura cycloidis

$$s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$$

atque

$$ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

hincque

$$dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}.$$

Hoc ergo casu est

$$p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

functio ipsarum a et x nullius dimensionis, ut requiritur. Quare pro curva CMM reperitur ista aequatio

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

seu

$$\frac{x\,da - a\,dx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{b}}{a}.$$

Si aequatio inter coordinatas orthogonales x et y desideretur, ex aequatione

$$y = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

seu huius differentiali posito quoque a variabili valor ipsius a debet substitui. Haec vero aequatio differentiata posito a quoque variabili dat

$$a\,dy - y\,da = \frac{a\,dx\sqrt{2ax} - x\,da\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

seu

$$\frac{a\,dy - y\,da}{\sqrt{2a}} = \frac{ax\,dx - x^2da}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}}.$$

Quae abit in hanc

$$\frac{a\,dy - y\,da}{a^2\sqrt{2}} = \frac{ax\,dx - x^2da}{a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}.$$

Superior vero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc

$$\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{ax\,da - a^2dx}{4a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}.$$

Hae duae aequationes additae dant aequationem integralem, cum constante, quae est

$$\frac{y}{a\sqrt2} = \frac{\sqrt b}{2\sqrt a} \ldots \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{2a}$$

Ex qua valor ipsius a erutus fit

$$\sqrt a = \frac{y\sqrt{2b} + \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b - x}$$

et

$$\sqrt{(ax - 2x^2)} = \frac{yx\sqrt2 + \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b - x}$$

Quibus valoribus in aequatione

$$\frac{(xdy - ydx)\sqrt a + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax - 2x^2)}} = dy\sqrt b,$$

quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da, substitutis prodibit

$$\frac{xdy - ydx - bdy}{\sqrt b} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt x},$$

aequatio pro curva quaesita CMM.

COROLLARIUM 6

118. Ex hac aequatione invenitur tangens anguli, quem curva CM cum applicata PM constituit, nempe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(b - x)\sqrt x}{y\sqrt x + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}.$$

Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois AM cum applicata PM constituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{x\sqrt2}.$$

Eliminato vero a erit ista tangens

$$= \frac{y\sqrt x + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b - x)\sqrt x}.$$

Quare, cum horum angulorum alter alterius sit complementum sumto illius deinceps posito, erit angulus, quem curva CMM cum qualibet datarum AM constituit, rectus. Consequenter curva CMM est traiectoria orthogonalis omnium cycloidum datarum AM, AM etc.

COROLLARIUM 7

119. Sumto AC alius magnitudinis aliae quoque curvae CMM prodibunt et sic infinitae traiectoriae orthogonales inveniuntur, quae omnes inter se sunt similes. Data ergo una facile, quotquot libuerit, construere licebit.

SCHOLION 4

120. Omnes hae curvae arcus abscindentes isochronos, quaecunque fuerint curvae secandae, semper construi possunt, etiamsi id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curvis arcus possunt abscindi, qui dato tempore descensu absolvantur, hocque modo puncta quotlibet curvae quaesitae inveniuntur. Si quidem curvae secandae sunt algebraicae, aequatio pro curva secante semper ita est comparata, ut factis debitis substitutionibus indeterminatae a se invicem possint separari. At si curvae secandae differentiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curva secante rarissime separationem indeterminatarum admittit. Causa est, quod peculiari modo, quo in hoc cycloidum casu usus sum, parameter a eliminari debeat eaque substitutio ad separationem non deducat.

SCHOLION 5

121. Deinde observandum est omnes curvas arcus isochronos abscindentes, quarum numerus pro vario ipsius b valore est infinitus, inter se similes esse, si quidem curvae secandae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a},$$

in qua, cum p sit functio ipsarum a et x nullius dimensionis, quantitates a, b et x homogeneitatem constituunt. At ex aequatione curvarum secandarum, quia in ea a, x et y ubique eundem dimensionum numerum conficere ponuntur, valor ipsius a erit functio ipsarum x et y unius dimensionis. Quare

eo substituto loco a habebitur aequatio pro curva secante, in qua b, x et y ubique eundem dimensionum numerum constituunt. Consequenter b variabili posito oriuntur infinitae curvae similes inter se respectu puncti A. Data ergo unica reliquae facile ex similitudinis ratione describuntur.

SCHOLION 6

122. Materia haec de arcubus isochronis abscindendis iam praeterito seculo est pertractata in Act. Erud. Lips. A. 1697 a Cel. Ioh. Bernoullio[1]) atque postmodum in Comment. Acad. Paris. a Cel. Saurino[2]), qui vero alia methodo sunt usi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in nostris Comment. pro A. 1734[3]) tradidi, tanquam commodissimam ad huiusmodi problemata solvenda. In his vero locis Viri Cel. curvas quoque similes tantum ut ego consideraverunt, sine dubio, quia pro curvis dissimilibus solutio fit nimis difficilis et saepe etiam vires superat. Vocantur vero in locis citatis hae curvae synchronae, quia arcus simul percursi abscinduntur.

SCHOLION 7

123. Ex mea dissertatione Tomi VII Comment. Acad. Petrop.[4]) apparet has curvas synchronas simili modo posse inveniri, si curvae datae etiam non fuerint similes, sed eiusmodi tamen, ut posito $ds = pdx$ in p quantitates a et x datum dimensionum numerum constituant; tum enim aeque facile valor literae q invenitur; ut si numerus dimensionum ipsarum a et x in p fuerit n, aequatio pro curva secante reperietur haec

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} + \frac{pda\sqrt{x}}{a} = \frac{(2n+1)da\sqrt{b}}{a}.$$

Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, ut si fuerit $p = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, erit

$$\frac{dx}{x} = -\frac{da}{a}$$

1) Ioh. Bernoulli, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus ... et de curva synchrona, seu radiorum unda construenda*, Acta erud. 1697, p. 206; *Opera omnia*, Tom. I, p. 187. P. St.

2) Joseph Saurin (1653—1716), *Solution générale du problème, où, parmi une infinité de courbes semblables, décrites sur un plan vertical, et ayant un même axe et un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine et une ligne donnée de position est parcouru dans le plus court temps possible*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1709, p. 257; 1710, p. 208. P. St.

3) Vide notam p. 44. P. St. 4) Editio princeps: *Tomi IX*. Vide notam p. 44. P. St.

ideoque $x = ma$, seu x in data ratione ad parametrum a est capiendum; quo igitur casu constructio synchronarum est facillima. At si p non huiusmodi habuerit valorem, ex supra citata dissertatione mea intelligitur, quo modo in aequationem quaesitam sit inquirendum.

PROPOSITIO 15

PROBLEMA

124. *Si fuerint ut ante infinitae curvae similes AM, AM etc.* (Fig. 18) *et recta positione data DE, invenire eam curvam AMN, super qua corpus tempore brevissimo ex A ad rectam DE descensu pervenit.*

SOLUTIO

Descripta per propositionem praecedentem quacunque curva CMM arcus AM isochronos abscindente ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifestum est super curva AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore brevissimo ad rectam GMH esse venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curvam CMM cadunt ideoque longiore tempore opus est, quo corpus ad ea perveniat. Iam, quoniam omnes curvae a curvis AM, AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (§ 121), concipiatur ex iis una, quae rectam DE tangat; dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curvarum CMM respectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curva AM rectae GH. Quare, cum corpus per AM tempore brevissimo ad GH perveniat, necesse est, ut quoque tempore brevissimo super curva AMN ad rectam DE perveniat. Q. E. I.

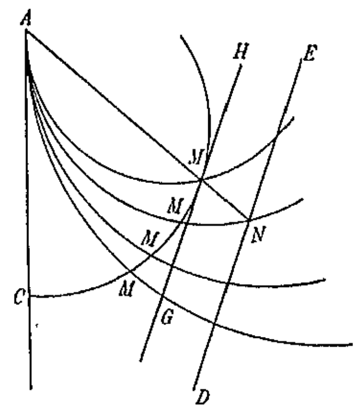


Fig. 18.

COROLLARIUM 1

125. Ex hoc perspicitur, si recta DE fuerit horizontalis, corpus descensu per verticalem AC ad eam citissime pervenire ob tangentem curvae CMM in C horizontalem; id quod quidem per se perspicuum est.

COROLLARIUM 2

126. Si ergo curvae AM, AM fuerint cycloides, ut in exemplo 3 propositionis praecedentis posuimus, corpus super ea cycloide celerrime ad rectam DE perveniet, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurrit, quia angulus, quem quaeque cyclois cum curva CM constituit, est rectus.

COROLLARIUM 3

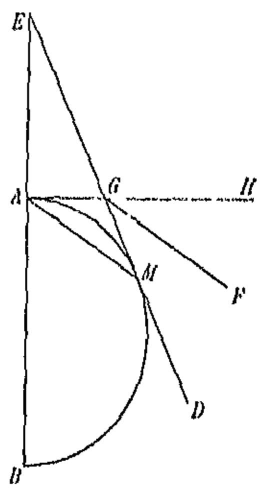


Fig. 19

127. Si igitur recta DE fuerit verticalis seu parallela ipsi AC, portio cycloidis AMM erit dimidia cyclois. Quare super dimidia cycloide motus horizontalis est celerrimus.

COROLLARIUM 4

128. Si curvae AM, AM sint rectae ex puncto A ad rectam positione datam DE ductae, corpus super ea AM (Fig. 19) citissime ad DE perveniet, quae est chorda circuli per A transeuntis et centrum in verticali AB habentis atque rectam DE tangentis (§ 112).

COROLLARIUM 5

129. Si igitur angulus DEA fuerit n graduum, erit angulus HAM $\frac{90+n}{2}$ graduum et angulus AMG graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu ducta horizontali AGH anguloque DGH bisecto recta GF erit quaesita linea AM parallela ipsi GF.

COROLLARIUM 6

130. Quare si linea DE fuerit verticalis, corpus ad eam citissime perveniet descendendo super recta ad horizontem angulo *semirecto inclinata*. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerrime progreditur.

SCHOLION

131. Simili modo quoque inveniri potest, super quanam infinitarum curvarum similium AM, AM (Fig. 18, p. 53) corpus descensu citissime ad datam curvam perveniat. Nam si linea GMH fuerit curva quaecunque tangens curvam CMM in M, corpus super hac curva AM celerrime ad curvam GMH perveniet, si quidem tota curva GMH extra curvam CMM fuerit sita. Eodem etiam modo posset determinari, si curvae AM, AM non fuerint similes, super quanam corpus celerrime ad datam lineam GH perveniat. Ex infinitis enim curvis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaerenda, quae datam GMH tangat, eritque ea curva AM, quae per punctum contactus transit, ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curvas CMM invenire multoque difficilius eam determinare, quae datam lineam tangat, quaestionem ad curvas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16

THEOREMA

132. *Tempora descensuum, quibus corpus curvas AM et Am* (Fig. 20, p. 56) *similes similiterque ex puncto A positas percurrit, sunt in ratione subduplicata laterum homologorum.*

DEMONSTRATIO

Quia curvae AM, Am sunt similes, erunt $AM:Am$, $AP:Ap$ et $PM:pm$ in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; sit ratio laterum homologorum $N:n$. Quia celeritas in M est ad celeritatem in m ut $\sqrt{AP}$ ad $\sqrt{Ap}$, erunt celeritates in M et m in ratione subduplicata laterum homologorum. Sumantur iam ex M et m elementa similia, rationem scilicet N ad n tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur, in ratione composita ex directa elementorum, i. e. N ad n, et

reciproca celeritatum, i. e. $\sqrt{N}:\sqrt{n}$. Ex quo sequitur tempora, quibus curvarum AM, Am elementa homologa percurruntur, esse in ratione subduplicata

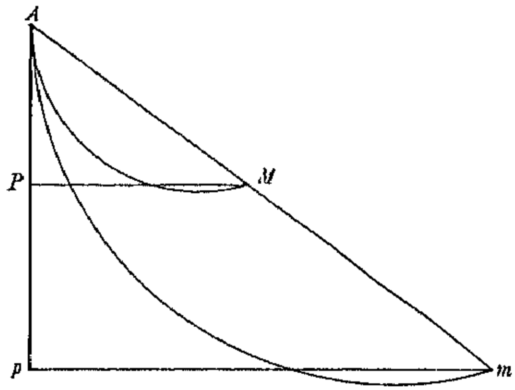


Fig. 20.

laterum homologorum. Quare, cum haec ratio sit constans, tempora, quibus totae curvae AM et Am percurruntur, eandem hanc rationem tenebunt. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes similiterque positi descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

COROLLARIUM 2

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describunt, oscillationes absolvent temporibus, quae rationem subduplicatam longitudinum pendulorum tenebunt.

COROLLARIUM 3

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora pendula non circulos describant, sed alias curvas, dummodo eae fuerint inter se similes similesque arcus absolvantur.

SCHOLION

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem semper ponimus uniformem deorsumque tendentem, etiamsi hanc conditionem omiserimus. Hanc enim hypothesin ante pertractare constituimus, quam ad alias sumus progressuri.

PROPOSITIO 17

PROBLEMA

137. *Existente potentia sollicitante uniformi tendenteque deorsum moveatur corpus super curva quacunque AM* (Fig. 21) *cum data celeritate initiali in A; determinare motum corporis super hac curva et pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.*

SOLUTIO

Posita potentia sollicitante g et celeritate initiali in A debita altitudini b praetereaque $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et celeritate in M debita altitudini v, his positis erit $dv = gdx$ (§ 93), unde fit $v = b + gx$. Porroque tempus per arcum AM erit $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}}$. Deinde pressio totalis, quam sustinet curva secundum directionem normalis MN, erit (§ 93)

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2(b+gx)dxddy}{ds^3}$$

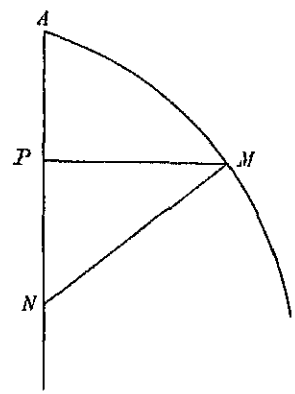


Fig. 21.

existente dx elemento constante. Hoc enim tantum differt haec solutio a solutione propositionis 13, quod ibi esset $v = gx$, hic vero sit $v = b + gx$. Ex his igitur formulis tum motus tum pressio cognoscitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

138. Si linea AM fuerit recta, iam ex § 88 intelligitur tempus per AM esse ad tempus descensus per AP eadem celeritate $\sqrt{b}$ incepti, ut est AM ad AP. Pressio vero ob evanescentem vim centrifugam erit $= \frac{gdy}{ds}$ seu constans.

COROLLARIUM 2

139. Patet etiam hoc casu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem ab altitudine tantum pendere. Quare, quaecunque fuerit curva AM, celeritas corporis in quovis puncto innotescit, etiam incognita curvae natura.

EXEMPLUM 1

140. Sit curva AM parabola verticem in A et axem verticalem AP habens; erit ergo posita eius parametro $= a$

$$y^2 = ax$$

et

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+4ax)}}{2\sqrt{ax}}.$$

Habebitur ergo tempus per AM

$$= \int \frac{dx\sqrt{(a+4x)}}{2\sqrt{x(b+gx)}}.$$

Deinde, cum posito dx constante sit $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$, erit

$$\frac{dxddy}{ds^2} = \frac{-2a}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}.$$

Consequenter pressio totalis est

$$= \frac{ga}{\sqrt{(a^2+4ax)}} - \frac{4a(b+gx)}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}} = \frac{ga^2-4ab}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}.$$

COROLLARIUM 3

141. Si igitur est $b = \frac{ga}{4}$, pressio curvae evanescit. Corpus ideo hoc casu libere in hac parabola moveri posset, qui est etiam ipse casus praecedente libro [§ 564] pertractatus.

COROLLARIUM 4

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4}ga$ erit tempus per arcum AM

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}.$$

Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abscissam AP a quiete incepti.

COROLLARIUM 5

143. Si $b > \frac{1}{4}ga$, pressio fit negativa; tum igitur curva in plagam axi AP oppositam premitur. At si $b = \frac{1}{4}ga$, directio pressionis erit in MN. Quantitas vero pressionis in singulis curvae punctis erit reciproce ut radius osculi.

EXEMPLUM 2

144. Si curva AM fuerit circulus, cuius radius $= a$ et centrum in verticali AP sit positum, erit

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

unde

$$dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

Erit ergo tempus, quo arcus AM percurritur,

$$= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}.$$

Atque cum sit

$$\frac{dxddy}{ds^3} = \frac{1}{a},$$

erit pressio, quam circulus in puncto M patitur,

$$= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b + gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}.$$

COROLLARIUM 6

145. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = 0$; fit autem $= \infty$, seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (§ 97) patet. Nam quia curva in A est normalis in AP neque radius osculi infinite parvus, corpus descendere non potest.

COROLLARIUM 7

146. Si est $b = \frac{ga}{2}$ seu celeritas initialis tanta, quantam co
cadendo ex altitudine dimidii radii circuli, pressio totalis cur
erit conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$; erit itaque altitudini percursae

DEFINITIO 3

147. *Motus oscillatorius est motus reciprocus, quo corpus alternatim accedit et recedit ab initio motus M (Fig. 22). Ita si corpus super curva MAN moveatur, primo descendet super MA, tum ascendet in AN, donec celeritatem amiserit;*

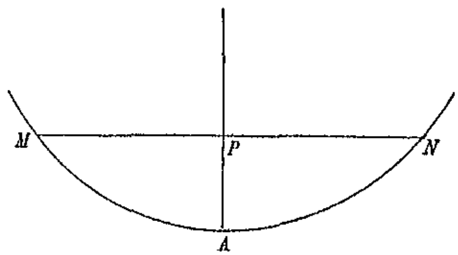


Fig. 22.

deinde ex N iterum descendet ascendetque in arcu AM, quo facto iterum descendet hancque periodum continuabit. Atque talis motus oscillatorius vocatur.

COROLLARIUM 1

148. Motus oscillatorius ergo consistit in alternis descensibus et ascensibus super linea curva; atque descensu motu accelerato movetur, ascensu vero celeritatem acquisitam rursus perdit.

COROLLARIUM 2

149. Quilibet ergo descensus super eadem curvae parte fit, super qua praecedens ascensus contigit. Quare, cum celeritas corporis ab altitudine tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curvae puncto sive in ascensu sive in descensu eandem habet celeritatem.

COROLLARIUM 3

150. Ex quo sequitur tempus descensus per MA aequale esse tempori ascensus per AM similique modo tempus ascensus per AN tempori descensus per NA.

COROLLARIUM 4

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N usque perveniet, quod aeque altum est ac punctum M, ex quo erat delapsum. Sequitur hoc ex eo, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

COROLLARIUM 5

152. Si curva AN similis et aequalis fuerit curvae AM, tum motus per AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes ascensus et descensus aequalibus fient temporibus.

COROLLARIUM 6

153. Si curvae MA, AN fuerint dissimiles, tempus saltem per MAN aequale erit tempori per NAM, seu tempora accessionum et recessionum erunt inter se aequalia.

COROLLARIUM 7

154. Quia corpus semper ad eandem altitudinem pertinget, manifestum est hunc motum oscillatorium perpetuo durare debere.

COROLLARIUM 8

155. Curva ergo ad motum oscillatorium producendum apta est omnis curva, quae de puncto infimo A duos habet arcus ascendentes, ut MAN.

SCHOLION 1

156. Exposuimus hic proprietates motus oscillatorii, quales ex exposita hypothesi potentiae sollicitantis uniformis et perpetuo deorsum tendentis consequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, si potentia utcunque ab altitudine pendeat vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in sequentibus plenius apparebit. In medio resistente vero res aliter se habet; nam neque ascensus per datam curvam similis est descensui per eandem, neque in ascensu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descensu erat delapsum.

SCHOLION 2

157. Vocari solet motus per MAN itus, sequens vero motus per NAM reditus; consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus et reditibus. Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu constans, ab aliis tam itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscillationis vocem accipiemus, ita ut una oscillatio ex uno itu unoque reditu constet. Itus vero atque reditus uterque uno ascensu unoque descensu consistit atque ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus complectetur. Cum igitur tempus itus aequale sit reditus tempori, erit tempus unius oscillationis duplo maius quam tempus unius itus seu reditus.

COROLLARIUM 9

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, si motum oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus solos super duabus curvae partibus AM, AN considerare opus habebimus.

SCHOLION 3

159. Nihil refert, utrum arcus AM et AN unam curvam continuam constituant, an vero sint diversae curvae, dummodo in A ita sint coniunctae, ut communem habeant tangentem; alias enim motus perturbaretur. Quare ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, ut motus super curvis AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad oscillationes determinandas tum ad relationem inter maiores minoresque oscillationes inveniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, quae maioribus arcubus absolvuntur, minores vero, quae minoribus.

SCHOLION 4

160. Ex propositione 6 (§ 49) perspicitur, quomodo oscillationes ope pendulorum effici queant, scilicet ope evolutae curvaram AM et AN, circum quas filum circumducitur. Ab Hugenio etiam iste pendulorum usus ad oscillationes accommodatur, ut vel ex eius instituto, quo eo motu ad horologia perficienda utitur, apparet. Eaedem vero difficultates, quas loco citato commemoravimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti super datis lineis hic tantum investigabimus mentemque ab omnibus pendulorum circumstantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 18

PROBLEMA

161. *Existente potentia sollicitante uniformi et deorsum directa determinare tempus ascensus seu descensus per quemvis circuli arcum EA* (Fig. 23) *in puncto circuli infimo A terminatum.*

SOLUTIO

Sit C circuli centrum, erit CA radius verticalis seu parallelus directioni potentiae g. Ponatur $AC = a$ et arcus AE altitudo $AG = b$, erit celeritas in infimo puncto A debita altitudini gb, quia corpus ex E descendens tantam habebit celeritatem, cum in A pervenerit. Atque tantam celeritatem corpus in A habere debet, ut ad E usque ascendere possit. Consideretur quodvis arcus AE elementum Mm et dicatur $AP = x$; erit

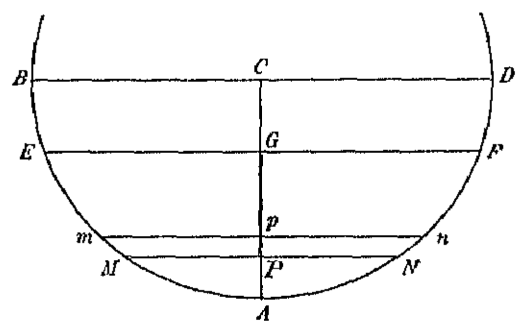


Fig. 23.

$$PM = \sqrt{(2ax - x^2)}$$

et

$$Mm = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

Celeritas vero in M erit debita altitudini $g \cdot GP = gb - gx$ (§ 93). Tempus igitur, quo elementum Mm sive ascensu sive descensu percurritur, erit

$$= \frac{a\,dx}{\sqrt{g(b-x)(2ax-x^2)}}.$$

Quod quia integrari non potest, per series eius integrale exprimemus. Est autem posito $2a = c$

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \left\{ \begin{aligned} & x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc} + \frac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2 + 2bc + 3c^2)}{8b^2c^2} \\ & + \frac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + 5c^3)}{16b^3c^3} + \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

Hoc ergo per $\frac{a\,dx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus AM

absolvitur,

$$= \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}}\left(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3} + \text{etc.}\right).$$

Totum vero tempus per arcum EA prodibit, si fiat $x = b$ et ratio peripheriae ad diametrum $= \pi : 1$, quo posito habebitur[1])

$$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} + \text{etc.}\right) = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}\right).$$

Ubi coefficientes $1, \frac{1}{4}, \frac{9}{64}$ etc. sunt quadrata coefficientium $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$, qui prodeunt, si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resolvitur. Ex hac igitur serie tempus vero proxime potest inveniri. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit tempus, quo is percurritur. Fit enim posito $b = 2a = c$ tempus infinitum, quia corpus descensu semicirculum nequaquam describere potest.

COROLLARIUM 2

163. Si igitur corpus oscillatorio motu movetur in arcu circuli EAF, erit tempus unius itus vel reditus duplo maius quam tempus unius ascensus vel descensus, quia tempus per ANF aequale est tempori per AME. Quare unius itus reditusve tempus seu tempus dimidiae oscillationis erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}\right).$$

Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absolvetur.

SCHOLION 1

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo potest inveniri. Temporis elementum in hos factores resolvatur

$$\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}} \times \frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$$

1) Vide scholion 1. P. St.

horumque posterior tantum in seriem commutetur, scilicet hanc

$$\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1\cdot x}{2\cdot c\sqrt{c}}+\frac{1\cdot 3\cdot x^2}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}}+\text{etc.}$$

posito $2a=c$. Quia autem post integrationem fit $x=b$, erit

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\pi,\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{1\cdot\pi b}{2},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{1\cdot 3\cdot\pi b^2}{2\cdot 4},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\pi b^3}{2\cdot 4\cdot 6}\text{ etc.}$$

Ex quibus totum descensus tempus ut ante colligitur

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1+\frac{1b}{4c}+\frac{9b^2}{64c^2}+\frac{225b^3}{2304c^3}+\text{etc.}\right).$$

SCHOLION 2

165. Quo appareat, a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei

$$1+\frac{1b}{4c}+\frac{9b^2}{64c^2}+\text{etc.}$$

pendeat, pono

$$\frac{b}{c}=\frac{tt}{1+tt}$$

et summam seriei

$$=e^{\int\frac{qdt}{t}}$$

denotante e numerum, cuius log. est $=1$. His positis ex mea series summandi methodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII exposita[1]) invenitur sequens aequatio

$$dq+\frac{q^2dt}{t}=\frac{tdt}{(1+tt)^2}.$$

Ex qua aequatione, si construi posset, inveniretur q in t indeque ipsa summa per t seu per $\frac{b}{c}$. Quia autem aequatio constructionem non admittit, in se

1) L. EULERI Commentatio 41 (indicis ENESTROEMIANI): *De summis serierum reciprocarum*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14. P. St.

spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempora in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ex ea constructio aequationis inventae sequitur.

COROLLARIUM 3

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absolvitur, ponitur infinite parvus, tempus per eum tamen non fit infinite parvum. Evanescit enim in expressione temporis tantum b eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE evanescentem

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 4

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EAF evanescentem fient infinite parvae; tempore tamen absolventur finito. Scilicet tempus unius itus vel reditus seu tempus unius dimidiae oscillationis erit

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 5

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite parvarum sunt in ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

COROLLARIUM 6

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit uniformis. Nam utcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinite parvo motum agit, constantem habebit valorem.

COROLLARIUM 7

170. Intelligitur, etiamsi curva EAF non fuerit circulus, sed curva quaecunque, tum etiam, quae hic allata sunt, ad oscillationes infinite parvas super hac curva pertinere. Tum vero loco radii a radius osculi huius curvae in puncto infimo A est accipiendus.

COROLLARIUM 8

171. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite parvo EAF efficiuntur ope penduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscillationum infinite parvarum pendulorum sunt directe ut radix quadrata ex longitudine penduli et reciproce ut radix quadrata ex potentia sollicitante.

COROLLARIUM 9

172. Si curva ANF non fuerit aequalis curvae AME, pro oscillationibus infinite parvis radium osculi in A tantum considerare sufficit. Sit is $=\alpha$, erit tempus ascensus per arcum AF infinite parvum $=\frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$, atque cum tempus descensus per arcum EMA evanescentem sit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, erit tempus unius itus seu dimidiae oscillationis super curva composita EAF

$$=\frac{\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}.$$

COROLLARIUM 10

173. Si oscillationes non fuerint infinite parvae super circulo BAD, tempora oscillationum maiora erunt, quo maiores sint oscillationum arcus. Atque si oscillationes tamen sint valde parvae, erit tempus talis oscillationis ad tempus oscillationis infinite parvae ut quadruplum diametri circuli sinu verso arcus percursi auctum ad quadruplum diametri ipsum.

COROLLARIUM 11

174. Altitudo, ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g sollicitatum descendit, quo fit descensus per arcum EMA infinite parvum, est $=\frac{\pi^2 a}{8}$, seu est ad octavam radii partem ut quadratum peripheriae circuli ad quadratum diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $=\frac{5}{4}a$.

COROLLARIUM 12

175. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, quo per diametrum circuli (§ 102). Quare tempus descensus super chorda in-

finite parva est ad tempus descensus super arcu respondente ut $\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ ad $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, i. e. ut diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus unius integrae oscillationis infinite parvae ex itu et reditu compositae ut diameter ad peripheriam.

SCHOLION 3

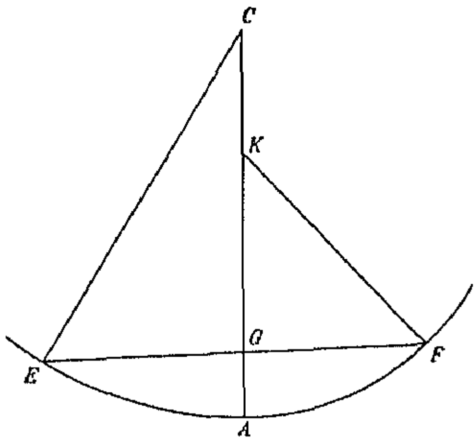


Fig. 24.

176. Si duo arcus circulares AE et FA (Fig. 24), super quibus coniunctis oscillationes peraguntur, non sunt aequales, ope penduli hae oscillationes confici possunt, si in centro K arcus AF clavus infigatur, ut filum CA, postquam arcum EA circa centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat.

PROPOSITIO 19

PROBLEMA

177. *Data potentia sollicitante invenire longitudinem penduli infinite parvas oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusve uno minuto secundo absolvat.*

SOLUTIO

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, unitate vim gravitatis denotante, est tempus unius dimidiae oscillationis infinite parvae $=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expressio ut in minutis secundis habeatur, longitudo a in partibus millesimis pedis Rhenani est exprimenda et formula $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 dividenda, ut ex primo libro [§ 221] apparet. Quamobrem

habebitur tempus unius dimidiae oscillationis

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}} \text{ min. sec.}$$

Quare, cum hoc tempus unum minutum secundum esse debeat, erit

$$\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$$

atque

$$a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}\,g \text{ part. mill. pedis Rhen.}$$

Haec ergo est longitudo penduli semioscillationes uno minuto secundo absolventis. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes peragentium, sed a diversis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiarum ratione.

COROLLARIUM 2

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi gravitatis 1, qui casus in oscillationes in superficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quod itus reditusque singulos uno minuto secundo absolvit,

$$= 3{,}16625 \text{ pedum Rhen.}$$

seu trium pedum cum sexta pedis parte.

SCHOLION 1

180. Apprime convenit haec longitudo cum ea, quam Hugenius per experimenta invenit; ex quo apparet nos in praecedente libro [§ 220] numerum 15625 scrup. pedis Rhenani recte pro altitudine, ex qua corpus vi gravitatis sollicitatum tempore unius minuti secundi delabitur, assumsisse; ex hoc enim numero fluit numerus 250, per quem temporum expressiones dividi debent, ut minuta secunda praebeant. Cum igitur Hugenius longitudinis 3,166 ped. tertiam partem pro pede universali haberi velit, quippe cuius longitudo ubique terrarum per observationes potest determinari, continebit hic pes universalis 1055 partes millesimas pedis Rhenani.

SCHOLION 2

181. Observationibus vero hic pes universalis sequenti modo commodissime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f, quod ad minimas oscillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiae oscillationes tempore unius horae earumque numerus sit n, ita ut una semioscillatio absolvatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. sec. Sit iam longitudo penduli semioscillationes minutis secundis absolventis z. Quare, cum tempora oscillationum diversorum pendulorum ab eadem potentia sollicitatorum sint in subduplicata ratione pendulorum (§ 171), erit

$$\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$$

ideoque

$$z = \frac{n^2 f}{12\,960\,000}$$

et consequenter pes universalis

$$= \frac{n^2 f}{38\,880\,000}.$$

COROLLARIUM 3

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhenani semioscillationes duobus minutis secundis absolvet, quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

COROLLARIUM 4

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen., si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius una semioscillatio 2536 min. sec. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absolvet.

COROLLARIUM 5

185.[1]) Quia tempus dimidiae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integrae oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus revolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circuli

1) Editio princeps falso omittit numerum 184. P. St.

urgetur vi $= g$, ut ex praecedente libro [§ 612] apparet. Hanc ob rem tempus unius oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur tempori, quo corpus proiectum in superficie terrae unam revolutionem perageret. Ostendit vero quoque HUGENIUS corpus hoc modo motum tempore 24 horarum fere 17 revolutiones esse absoluturum.

COROLLARIUM 6

186. Cum vis gravitatis sit ad vim, qua corpus in superficie solis ad centrum solis urgetur, ut 41 ad 1000[1]), erit longitudo penduli, quod in superficie solis semioscillationes minuto secundo absolvit, $= 77{,}226$ ped. Rhenan. Simili modo ob gravitatem in superficie Iovis $= \frac{167}{82}$ tale pendulum longum erit 6,448 ped. Atque in superficie Saturni ob gravitatem $= \frac{105}{82}$ talis penduli longitudo erit 4,054 ped.

PROPOSITIO 20

PROBLEMA

187. *Si fuerit curva BAD (Fig. 25), super qua fiunt oscillationes, cyclois circulo diametri AC super basi horizontali BD descripta, determinare tempus oscillationis per quemque arcum EAF existente potentia sollicitante uniformi et deorsum tendente.*

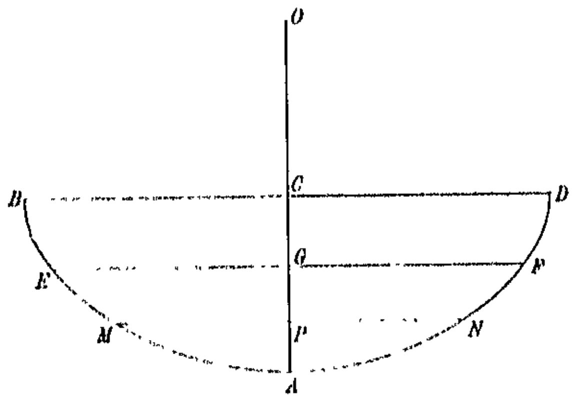


Fig. 25.

SOLUTIO

Sit radius osculi in A, nempe AO, $= a$, qui est duplum diametri circuli generatoris AC; erit ergo $AC = \frac{1}{2} a$ et posita abscissa $AP = x$ et arcu re-

1) Editio princeps: *ut* 1000 *ad* 41. Correxit P. St.

spondente $AM = s$ erit ex natura cycloidis

$$s^2 = 2ax.$$

Sit iam abscissa arcui EAF, qui motu oscillatorio percurritur, respondens $AG = b$; erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb et celeritas in M debita altitudini $g(b-x)$. Quare, cum sit

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}},$$

erit tempus, quo arcus AM percurritur,

$$= \int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{g(bx-x^2)}} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}.$$

Est vero, si post integrationem ponatur $x = b$, quo tempus per totum arcum AE prodeat,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$$

seu peripheria circuli per diametrum divisa. Quare tempus unius ascensus vel descensus est

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$$

et tempus unius itus vel reditus per arcum EAF erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

Atque tempus unius integrae oscillationis erit

$$= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

188. Quia in hanc temporis expressionem littera b, quae quantitatem arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oscillationum tempora, quae super eadem cycloide perficiuntur, sunt inter se aequalia.

COROLLARIUM 2

189. Tempus ergo uniuscuiusque oscillationis erit aequale tempori oscillationis per arculum infinite parvum. At arculus infinite parvus congruit cum arculo circuli radio OA descripti. Quare tempus cuiusque oscillationis super cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oscillationem minimam absolvit. Id quod etiam ex praecedente propositione elucet; tempus enim minimae oscillationis penduli a est $=\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (§ 167), qua eadem formula tempus unius oscillationis integrae super cycloide expressum invenimus.

COROLLARIUM 3

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, ut corpus oscillans in cycloide moveatur, omnes eius oscillationes, sive fuerint magnae sive parvae, aequalibus absolventur temporibus. Quare si AO fuerit $=3166\frac{1}{4}g$ scrup. pedis Rhenani, singulae semioscillationes minuto secundo absolventur.

COROLLARIUM 4

191. Omnes igitur descensus super cycloide ad punctum infimum A sunt aequitemporanei seu isochroni, item omnes ascensus ex puncto infimo A, donec celeritas fuerit absumta. Tempus vero unius ascensus vel descensus est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

SCHOLION 1

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appellari solet, quia omnes oscillationes super ea eodem tempore absolvuntur. Hugenius primus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit statimque cogitavit de cycloide in locum circuli substituenda in oscillationibus, id quod in horologiis effecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oscillandi modum rursus deseruerunt, quod eius usum nimis exiguum compererint. Atque certe in vacuo quaelibet curva oscillationes isochronas producit, quia perpetuo eiusdem magnitudinis existunt. In medio resistente vero, quo oscillationes decrescunt, cyclois hanc proprietatem amittit ideoque nullius est utilitatis.

SCHOLION 2

193. Intelligitur etiam, si duae cycloides AE et AF (Fig. 24, p. 68) dissimiles in punctis infimis iungantur, oscillationes super curva composita EAF aequalibus temporibus absolvi. Nam cum super utraque tempora ascensus vel descensus sint constantis quantitatis, etiam summae eorum, nempe tempora semioscillationum et integrarum oscillationum, inter se erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cycloidem $AF = \alpha$, erit tempus unius ascensus vel descensus super $AF = \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$. Quare itus reditusve super curva composita EAF absolvetur tempore $= \frac{\pi(\sqrt{2a} + \sqrt{2\alpha})}{2\sqrt{g}}$, integra vero oscillatio tempore $= \frac{2\pi(\sqrt{2a} + \sqrt{2\alpha})}{\sqrt{g}}$.

SCHOLION 3

194. Ordo requireret, ut, antequam ad alias potentiae sollicitantis directiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones sint adhuc parallelae, sed variabiles, evolveremus motumque corporis a huiusmodi potentia sollicitati super data curva investigaremus. Sed cum exempla motum notatu dignum continentia nobis adhuc lateant atque principia, quorum ope motus super quaque curva cognoscitur, iam sint exposita, pleniorem tractationem eo differemus, ubi curvas sumus investigaturi, super quibus corpus a huiusmodi potentiis sollicitatum data lege incedat.

PROPOSITIO 21

PROBLEMA

195. *Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum C* (Fig. 26, p. 75) *trahatur atque super data curva AM moveatur, determinare motum corporis super hac linea et pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.*

SOLUTIO

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b et puncti A a centro C distantia $AC = a$. Celeritas vero corporis in quocunque curvae

loco M debita sit altitudini v et vis, qua corpus in M versus C sollicitatur, sit $= P$ existente vi gravitatis corporis moti $= 1$. Dicatur distantia MC y et arcus AM s; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C describantur arcus circulares MP, mp; erit $AP = a - y$, $Pp = Mn = -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT erit

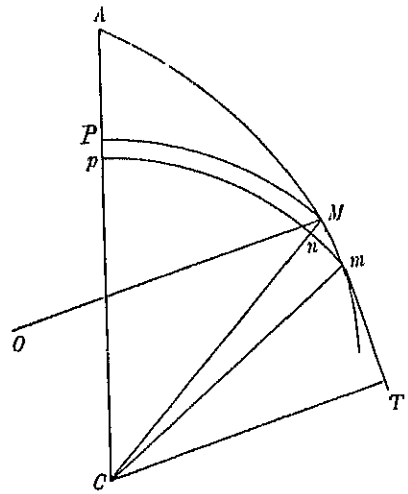


Fig. 26.

$$MC : MT = Mm : Mn$$

et

$$MC : CT = Mm : mn,$$

unde erit

$$MT = \frac{-y\,dy}{ds} \quad \text{et} \quad CT = \frac{y\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}.$$

Ex quibus, si vis centripeta in tangentialem secundum MT et normalem secundum MO resolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $= \frac{P\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$. Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv = -Pdy$. Ponatur intervallum $AP = x$, quo corpus propius ad centrum accessit; erit $a - y = x$ et $dx = -dy$. Quare erit $dv = Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi. Ita igitur integrali $\int Pdx$ accepto, ut evanescat posito $x = 0$, erit

$$v = b + \int Pdx.$$

Ex quo tempus per arcum AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b + \int Pdx)}}.$$

Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$ tota in pressione curvae secundum MO insumitur. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhibeatur, pono perpendiculum $CT = p$; erit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$. Deinde radius osculi MO erit $= \frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga

$$= \frac{2vdp}{ydy} = \frac{2dp(b + \int Pdx)}{ydy},$$

cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem curva in M versus MO premetur vi

$$=\frac{Ppdy-2bdp-2dp\int Pdx}{ydy}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita ut corpus in aequalibus a centro distantiis aequaliter urgeatur, celeritas corporis a distantia quoque tantum pendebit atque corpus super curva AM motum in aequalibus a centro distantiis aequales habebit celeritates.

COROLLARIUM 2

197. Atque in quovis puncto M celeritas tanta erit, quantam idem corpus acquireret, si eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ ex A per intervallum AP descenderet, existente nimirum $CP=CM$.

COROLLARIUM 3

198. Etiamsi igitur ipsa curva AM sit incognita, tamen corporis super ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari. Est nempe pro distantia y

$$v=b+\int Pdx$$

existente $x=a-y$.

COROLLARIUM 4

199. Si curva AM fuerit talis, ut pressio, quam corpus in eam exercet, sit nulla, erit curva ea ipsa, quam corpus motum in A celeritate $\sqrt{b}$ inchoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero

$$Ppdy=2bdp+2dp\int Pdx,$$

seu ob $dx=-dy$ habebitur

$$Ppdy+2dp\int Pdy=2bdp.$$

Cuius integralis est

$$p^2\int Pdy=bp^2-bh^2$$

existente h perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus invenitur

$$P = \frac{2bh^3 dp}{p^3 dy},$$

uti praecedente libro [§ 587] pro motu libero invenimus.

COROLLARIUM 5

200. In motu igitur super quacunque curva AM pressio, quam curva in M secundum MO sustinet, est

$$= \frac{-\operatorname{diff.} p^2(b + \int P dx)}{py\,dy} = \frac{\operatorname{diff.} p^2(b + \int P dx)}{p\,dx(a-x)} = \frac{\operatorname{diff.} p^2 v}{p\,dx(a-x)}.$$

EXEMPLUM 1

201. Sit curva AM circulus centrum in C habens, erit motus corporis uniformis propter eandem eius perpetuo a centro virium C distantiam. Quare erit $v = b$ et $\int P dx = 0$ atque tempus per AM

$$= \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}.$$

Deinde cum sit $y = a$, erit et $p = a$ et $dp = dy$. Quamobrem pressio, quam curva secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $= P - \frac{2b}{a}$. Ex quo perspicitur, si fuerit $b = \frac{Pa}{2}$, corpus libere per hunc circulum motum iri.

EXEMPLUM 2

202. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curva AM spiralis logarithmica circa centrum C, ita ut sit

$$p = my$$

et

$$dp = m\,dy \quad \text{atque} \quad ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$

Erit ergo

$$v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n}{(n+1)f^n}$$

atque tempus per arcum AM

$$= \frac{\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(1-m^2)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1}+(n+1)bf^n)}}.$$

Pressio vero, quam curva secundum MO sustinet, erit

$$= \frac{m(n+3)y^n}{(n+1)f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2ma^{n+1}}{(n+1)f^n y}.$$

COROLLARIUM 6

203. Corpus igitur, cum in centrum C pervenerit, celeritatem habebit finitam, si $n+1$ est numerus affirmativus; altitudo enim isti celeritati debita est

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n} + b.$$

At si $n+1$ est numerus negativus vel etiam $=0$, celeritas corporis in C erit infinite magna.

COROLLARIUM 7

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione a centro tendente, seu vis centrifuga praevalebit, si fuerit $n > -3$. At si $n < -3$, tunc vis normalis praevalebit atque curva vi infinita versus centrum premetur.

PROPOSITIO 22

PROBLEMA

205. *Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium C* (Fig. 27, p. 79) *trahatur dataque sit curva EAF ad oscillandum idonea, determinare motum oscillatorium corporis super hac curva.*

SOLUTIO

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis, erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantiis, ut M et

N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla; maxima vero erit in puncto curvae A centro C proximo; ducaturque recta CAO. Corpus ergo per arcum EAF oscillationes absolvet, ad quas definiendas motum corporis super utraque curva AE et AF investigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A, debita altitudini b et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v. Ponatur distantia CM, cui aequalis sit CP, $= y$ et vis centripeta in $M = P$. Sit $CA = a$ et $AP = x$ atque $AG = k$ sumta $CG = CE$; erit $y = a + x$ et $CG = CE = a + k$. Posito arcu $AM = s$ erit tangens MT, quam perpendiculum ex C in eam demissum determinat, $= \frac{y\,dy}{ds}$ ideoque vis tangentialis $= \frac{P\,dy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria; unde habebitur

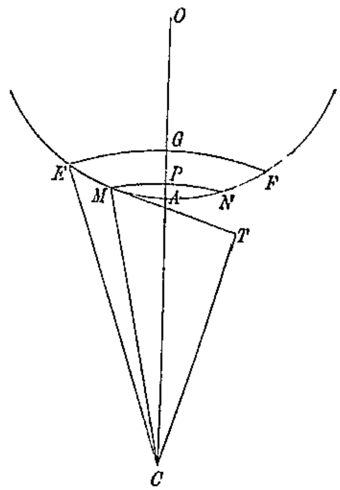


Fig. 27.

$$dv = -P\,dy = -P\,dx \quad \text{et} \quad v = b - \int P\,dx$$

integrali $\int P\,dx$ ita accepto, ut evanescat posito $x = 0$. Si igitur ponatur $v = 0$, dabit ex aequatione $b = \int P\,dx$ valor ipsius x erutus intervallum AG seu k. Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int P\,dx)}},$$

ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem ita institutam, ut integrale evanescat posito [$x = 0$, ponatur] $x = k$ seu $\int P\,dx = b$. Simili modo tempus per arcum AF invenietur, quo igitur invento summa horum temporum dabit tempus unius semioscillationis. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

206. Si curva AF similis et aequalis fuerit curvae AE, tempora per utramque erunt aequalia atque ideo tempus unius semioscillationis aequabitur duplo tempori per AE.

EXEMPLUM 1

207. Si arcus EAF fuerit infinite parvus, potentia sollicitans P ob distantiam a centro C invariabilem erit constans $= g$. Sit radius osculi curvae

in A seu $AO = h$; erit AE arcus circuli hoc radio descriptus. At ex na
circuli erit

$$CT = \frac{a^2 + 2ah - y^2}{2h}$$

et

$$MT = \frac{\sqrt{(4h^2y^2 - a^4 - 4a^3h - 4a^2h^2 + 2a^2y^2 + 4ahy^2 - y^4)}}{2h}.$$

Sed ob $y = a + x$ et x respectu a et h infinite parvum erit

$$MT = \frac{\sqrt{2ahx(a+h)}}{h}$$

et

$$ds = \frac{hydy}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{h(a+x)dx}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2(a+h)x}}.$$

At cum sit $v = b - gx$ ideoque $b = gk$, habebimus $v = g(k-x)$ atque
mentum temporis

$$= \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)(kx - x^2)}}.$$

At

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(kx - x^2)}}$$

posito $x = k$ fit $= \pi$, peripheriae circuli existente diametro 1. Consequ
tempus per arcum AE infinite parvum est

$$= \frac{\pi\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)}} = \frac{\pi\sqrt{2ah}}{2\sqrt{g(a+h)}}.$$

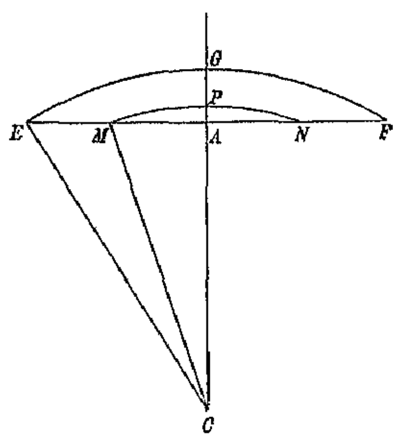


Fig. 28.

COROLLARIUM 2

208. Si centrum virium infinite distet
esset $a = \infty$, erit potentiae directio sibi par
ideoque ut supra erit tempus, quo arcus
absovitur

$$= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}.$$

At si arcus circuli EA fit linea recta (Fi
seu $h = \infty$, erit tempus per EA

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 3

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque, sed directiones sibi parallelas habente, sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ah}{a+h}$. Tempus enim unius descensus seu ascensus huius penduli est (§ 166)

$$= \frac{\pi\sqrt{2ah}}{2\sqrt{g(a+h)}}.$$

EXEMPLUM 2

210. Sit iam (Fig. 28, p. 80) vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et linea EF recta. Erit

$$AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)} \quad \text{et} \quad x = y - a.$$

Erit autem porro

$$v = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

positoque $v = 0$ fiet

$$y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)bf^n = (a+k)^{n+1}.$$

Vel dicta $CE = c$ erit

$$b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n} \quad \text{et} \quad v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Consequenter ob $ds = \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per AM

$$= \int \frac{y\,dy\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}.$$

Quod integrale ita est accipiendum, ut fiat $= 0$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

COROLLARIUM 4

211. Ponatur vis centripeta distantiis proportionalis seu $n = 1$; erit tempus per AM

$$= \int \frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$$

seu posito $AE = i$ ob $c^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus per AM

$$= \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}},$$

unde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oscillationes super hac recta absolvuntur eodem tempore; dimidia nimirum oscillatio tempore $\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

COROLLARIUM 5

212. Si oscillatio est infinite parva, tempus unius semioscillationis super recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$; at cum vis centripeta tum ut constans considerari possit, sit ea $= g$; erit $\frac{a}{f} = g$ ideoque tempus unius semioscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ ut supra § 208.

COROLLARIUM 6

213. Quia directiones gravitatis revera convergunt ad centrum terrae, corpus in superficie telluris super recta perfecte horizontali oscillationes peragere posset, nisi resistentia et frictiones impedirent. Tempus autem unius semioscillationis talis foret (ob $a =$ semidiametro terrae et $g = 1$) 2536 minut. secund. (§ 183).

PROPOSITIO 23

PROBLEMA

214. *Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio sit verticalis MQ* (Fig. 29, p. 83), *alterius horizontalis MP, definire motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curva AMB.*

SOLUTIO

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis sollicitans secundum MQ sit $= P$ et ea secundum $MP = Q$. Ponatur $BR = t$, $RM = z$,

arcus $BM = w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oscillationes referetur, sit $AP = x = QM$, $PM = AQ = y$ et arcus $AM = s$; celeritas vero corporis in A debita sit altitudini b; erit ergo $t + x =$ const., item $z + y =$ const. et $w + s =$ const., unde $dt + dx = 0$[, $dz + dy = 0$] et $dw + ds = 0$. Resolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales erit vis tangentialis ex P orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $= \frac{Pdz}{dw}$ trahens secundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex Q $= \frac{Qdt}{dw}$, quae illi normali est contraria. Utraque vis tangentialis motum per BM accelerat ideoque erit

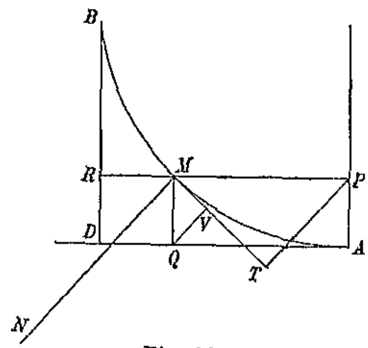


Fig 29.

$$dv = Pdt + Qdz \quad \text{et} \quad v = \int Pdt + \int Qdz$$

his integralibus ita acceptis, ut evanescant factis t et $z = 0$. Atque pro ascensu ex A erit

$$v = b - \int Pdx - \int Qdy$$

his integralibus ita sumtis, ut evanescant positis x et $y = 0$. Positis igitur in illa aequatione $v = \int Pdt + \int Qdz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit

$$= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int Pdt + \int Qdz)}}$$

et tempus per AM

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx - \int Qdy)}}.$$

Sumto elemento dt vel dx constante erit radius osculi curvae in $M = \frac{dw^3}{dt\,ddz}$ atque vis centrifuga, cuius directio secundum MN est,

$$= \frac{2\,dt\,ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}.$$

Totalis ergo vis, qua curva in M secundum MN premitur, est

$$= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2\,dt\,ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

215. Si P est functio ipsius x vel t quaecunque et Q functio ipsius y vel z quaecunque, tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi et ope aequationis pro curva tempus quoque.

COROLLARIUM 2

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae sollicitantes, si modo earum directiones sint in eo plano, in quo est curva AMB, in huiusmodi duas potentias possunt resolvi, haec propositio latissime patet et omnes casus complectitur, quibus potentiarum directiones et curva sunt in eodem plano.

SCHOLION

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiiciantur, et comprehendit casus, quibus non omnes potentiarum directiones sunt in plano curvae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resolvendae, quarum alterae sint in ipso curvae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur in plano curvae sitae eodem modo, quo in propositione usi sumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum MN; alterae potentiae, quia normales sunt in curvam, in curva premenda tantum insumentur. Quare hinc duplex nascetur pressio, quam curva sustinet, altera secundum MN directa, altera ad planum curvae normalis. Harum igitur duarum pressionum si media sumatur directio, prodibit directio potentiae aequivalentis, in qua curva premitur. Quamobrem non est opus, ut huiusmodi casus evolvamus, sed paucis attingemus motum corporum super curva, quae ipsa non est in plano sita, ubi potentiam sollicitantem constantem et deorsum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24

PROBLEMA

218. *Existente potentia sollicitante uniformi eiusque directione recta deorsum tendente determinare motum corporis super curva quacunque AM* (Fig. 30, p. 85) *non in eodem plano constituta.*

SOLUTIO

Sit curva AQ proiectio curvae AM in plano horizontali demissisque ex punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendiculis MQ et mq

ducantur ad axem pro lubitu assumtum AP normales QP et qp ponaturque $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b, celeritas in M debita altitudini v. Potentia vero sit $= g$, qua corpus in M secundum MQ sollicitatur. Ducta tangente MT et in eam ex Q perpendiculari QT resolvatur potentia g in tangentialem et normalem. Erit ob

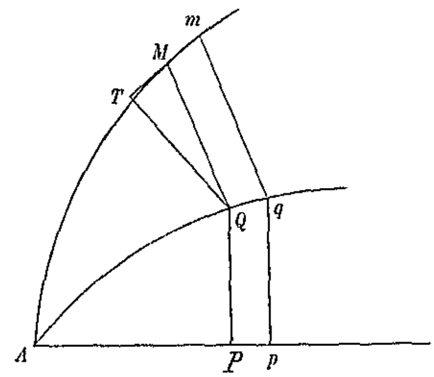


Fig. 30.

$$MQ : MT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : dz$$

vis tangentialis

$$= \frac{gdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Atque ob

$$MQ : QT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

vis normalis

$$= \frac{g\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Quia autem vis tangentialis motum retardat, erit

$$dv = -gdz \quad \text{et} \quad v = b - gz,$$

unde tempus, quo arcus AM absolvetur, prodit

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{(b - gz)}}.$$

Vis normalis vero efficiet, ut curva in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad Mm normalem et in plano $QMmq$ sitam. Premitur vero curva praeterea a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi oppositam vi

$$= \frac{2(b - gz)}{r}$$

designante r radium osculi curvae in M. Invenimus autem supra (§ 71) positionem radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui § 72 est inventus; est nempe

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

COROLLARIUM 2

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b - gz = 0$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit iterumque descendet.

COROLLARIUM 3

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P, tum inventam fuisse celeritatem in M debitam altitudini

$$b - \int Pdz.$$

SCHOLION 1

222. Si in plano verticali concipiatur curva AM (Fig. 31) ad axem horizontalem AQ relata fueritque $AQ =$ curvae AQ praeced. fig. et $QM = QM$ praeced. fig., erit quoque curva AM aequalis curvae AM praeced. fig. Si iam corpus super curva AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b - gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. fig. Hac igitur ratione motus corporis super curva non in eodem plano sita reduci potest ad motum super curva in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curvae sufferunt, erunt diversae. Quamobrem hoc modo pressio, ut libet, poterit variari manente motu corporis super curva eodem.

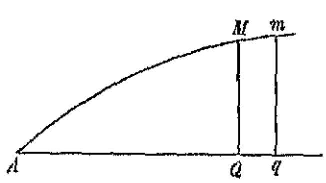


Fig. 31.

SCHOLION 2

223. Posuimus hactenus curvam, super qua corpus movetur, et potentiam sollicitantem una cum directione datas ex iisque motum corporis et pres-

sionem curvae deduximus. Nunc igitur, cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur reliquaque sunt invenienda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curvae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curva et motus super ea debeat inveniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25

PROBLEMA

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur, invenire curvam* AM (Fig. 32), *quam corpus super ea descendens ubique aequaliter premit.*

SOLUTIO

Sit AM curva quaesita; dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et curva $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$ et altitudo debita celeritati in $A = b$; erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$ integrali $\int P dx$ ita sumto, ut evanescat facto $x = 0$. His positis erit pressio, quam curva secundum normalem MN sustinet,

$$= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx) dx\, ddy}{ds^3}$$

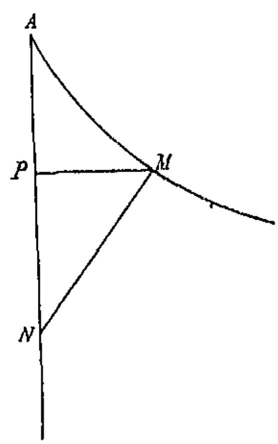


Fig. 32.

(§ 83) sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$; erit

$$k ds^3 = P ds^2 dy + 2b dx\, ddy + 2dx\, ddy \int P dx.$$

At si ponatur ds constans, habebitur

$$k ds dx = P dx dy + 2b\, ddy + 2ddy \int P dx,$$

cuius integralis est

$$\frac{2dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}.$$

Quae aequatio, cum P per x detur, construi potest, quia y in eam non ingreditur, sed tantum dy. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

225. Exprimit
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$$
tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM movetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b+\int P dx)}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP divisa dat $\frac{k ds}{2 dy}$, ex qua proprietate curva AM determinatur.

COROLLARIUM 2

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque, puta $\sqrt{c}$, potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curva in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli $=\frac{k\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}$ posito sinu toto $=1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam $\frac{2\sqrt{b}}{k}$ ideoque, si motus in A a quiete incipit, c debet esse $=0$.

EXEMPLUM

227. Sit potentia uniformis seu $P=g$; erit
$$\int \frac{k dx}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{2k\sqrt{(b+gx)}-2k\sqrt{b}+2k\sqrt{c}}{g} = \frac{2dy\sqrt{(b+gx)}}{ds},$$
unde habetur
$$\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{g\sqrt{(b+gx)}}$$
atque
$$g\,dy\sqrt{(b+gx)} = k ds\sqrt{(b+gx)} + k ds(\sqrt{c}-\sqrt{b}).$$
Ex qua orietur sequens aequatio
$$dy = \frac{k dx(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)-k^2(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})^2)}}.$$
Sit $\sqrt{(b+gx)}=t$ et $-\sqrt{c}+\sqrt{b}=h$; erit
$$x=\frac{t^2-b}{g} \quad \text{et} \quad dx=\frac{2t dt}{g}.$$

His igitur substitutis habebitur

$$dy = \frac{2ktdt(t-h)}{g\sqrt{(g^2t^2-k^2t^2+2k^2ht-k^2h^2)}}.$$

Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si $k=0$; tum enim invenitur curva, quam corpus in A proiectum libere describit. Alter est casus, quando $h=0$ seu $\sqrt{b}=\sqrt{c}$; tum enim habetur

$$\frac{dy}{ds}=\frac{k}{g}$$

seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k=g$ seu si tota pressio aequatur ubique vi sollicitanti corpus g, erit

$$dy=\frac{2ttdt-2htdt}{g\sqrt{(2ht-h^2)}},$$

cuius integralis est

$$gy=\frac{(2tt-2ht-2h^2)}{5h}\sqrt{(2ht-h^2)}+\text{const.}$$

Constans haec, quia posito $x=0$ seu $t=\sqrt{b}$ fit $y=0$, debet esse

$$=\frac{(2h^2+2h\sqrt{b}-2b)}{5h}\sqrt{(2h\sqrt{b}-h^2)}.$$

Restituto ergo $\sqrt{(b+gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b}-\sqrt{c}=h=\sqrt{a}$ habebitur

$$\frac{5gy\sqrt{a}}{2}=(b+gx-a-\sqrt{a(b+gx)})\sqrt{(2\sqrt{a(b+gx)}-a)}+(a-b+\sqrt{ab})\sqrt{(2\sqrt{ab}-a)}.$$

Quae est aequatio pro curva quaesita, in qua a debet esse numerus minor quam b.

Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c=0$, ut angulus ad A sit realis, et propterea habetur

$$y=\frac{kx}{\sqrt{(g^2-k^2)}}.$$

COROLLARIUM 3

228. Aequatio algebraica inventa, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a = b$, quo casu curvae tangens in A est verticalis, prodibit

$$\frac{5gy\sqrt{a}}{2} = (gx - \sqrt{(a^2 + gax)})\sqrt{(2\sqrt{(a^2 + gax)} - a)} + a\sqrt{a}.$$

COROLLARIUM 4

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c} = 0$ atque ideo prodibit ista aequatio

$$dy = \frac{k\,dx(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})}{\sqrt{\left(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})^2\right)}}.$$

Si tangens in A ponatur horizontalis, erit

$$k\sqrt{c} = g\sqrt{b}$$

habebiturque haec aequatio

$$dy = \frac{dx(k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{\left(g^2(b+gx) - (k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})^2\right)}}.$$

SCHOLION

230. Vocatur haec curva *linea aequabilis pressionis* eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris., quae cum hac nostra egregie convenit.[1]) Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed utcunque variabilis P, aequationem inventam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curvam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k = mP$ atque pro curva quaesita prodibit sequens aequatio

$$\frac{2\,dy\sqrt{(b + \int P\,dx)}}{ds} = \int \frac{mP\,dx}{\sqrt{(b + \int P\,dx)}},$$

1) G. F. DE L'HOSPITAL (1661—1704), *Solution d'un problème physico-mathématique, proposé par* IEAN BERNOULLI, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1700, p. 9. Vide etiam Commentationem P. VARIGNON (1654—1722), *Usage d'une intégrale donnée par G. F.* DE L'HOSPITAL, *ou sur les pressions des courbes en général, avec la solution de quelques autres questions approchantes de la sienne,* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1710, p. 158. P. St.

cuius integralis est

$$dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}.$$

Haec aequatio, si fuerit $c=0$, erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curva in A cum verticali constituit; eius enim sinus est $m+\frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare si sumatur $\sqrt{c}=-\sqrt{b}$, curva tanget in A verticalem. Praeterea haec curva hanc habet proprietatem, ut tempus, quo arcus AM percurritur, proportionale sit $m\cdot AM - PM$. Denique ex solutione huius propositionis fluit solutio sequentis, in qua ex data curva et pressione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26

PROBLEMA

231. *Data curva AM* (Fig. 32, p. 87) *et celeritate initiali in A debita altitudini b invenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, ut corpus super curva AM descendens curvam ubique aequaliter premat.*

SOLUTIO

Sit potentia sollicitans quaesita $=P$, dictisque $AP=x$, $PM=y$ et $AM=s$ atque pressione, quam curva sustinet, $=k$ habebitur ista aequatio

$$kdsdx = Pdxdy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$$

(§ 224), in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem per dy multiplicata et integrata dat

$$kds\int dxdy = dy^2\int Pdx + bdy^2,$$

ex qua prodit

$$\int Pdx + b = \frac{kds}{dy^2}\int dxdy;$$

quae differentiata dat

$$P = \frac{kds}{dy} - \frac{2kdsddy}{dxdy^3}\int dxdy.$$

At integrale $\int dxdy$ ita est sumendum, ut posito $x=0$ fiat

$$\frac{kds}{dy^2}\int dxdy = b.$$

Quo autem haec integratio facilius succedat, ponatur $dy = pdx$; erit

$$ds = dx\sqrt{(1+p^2)} \quad \text{et} \quad \int dxdy = ds\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$$

ideoque

$$\frac{kds}{dy^2}\int dxdy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Ex qua aequatione prodibit

$$P = \frac{k\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{2kdp}{p^3dx}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

232. Ex hac aequatione quoque statim celeritas corporis in singulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M est

$$b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^2}\int dxdy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Tempus vero, quo arcus AM absolvitur, est

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\int pdx : \sqrt{\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+p^2)}}}.$$

COROLLARIUM 2

233. Perspicuum est ex aequatione inventa quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior sit k ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus est in pressionem k.

COROLLARIUM 3

234. Etsi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expressione b non inest, tamen pendet P ab b ob integrale

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}},$$

quod ita est accipiendum, ut posito $x = 0$ fiat

$$\frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = b.$$

Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia sollicitans, tametsi curva proposita eadem maneat.

EXEMPLUM 1

235. Sit curva AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens, ita ut sit $ay = x^2$. Erit ergo

$$dy = \frac{2xdx}{a} \quad \text{hincque} \quad p = \frac{2x}{a}$$

et

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int\frac{2xdx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4x^2)} + C.$$

Quare erit

$$\frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2} + \frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}.$$

Quae quantitas cum debeat esse $= b$, si fit $x = 0$, erit $C = \frac{-a}{2}$ seu

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(a^2+4x^2)}-a}{2}.$$

Ex quibus invenietur

$$P = \frac{ka^3}{4x^3} - \frac{k(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2+4x^2)}}{4x^3}.$$

In ipso ergo puncto A potentia P erit infinite parva; tam numerator enim quam denominator evanescunt fitque valor istius expressionis $= 0$. Celeritas vero in A non potest esse arbitraria, etiam si constans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expressionem

$$b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^2}\int dxdy$$

reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor invenietur,

si in expressione

$$\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}-ka(a^2+4x^2)}{8x^2}$$

ponatur $x=0$. Tum autem prodibit

$$b=\frac{ka}{4}.$$

Hac ergo celeritate descensus incipere debet, ut pressio ubique aequalis a potentia P inventa oriatur.

EXEMPLUM 2

236. Sit curva AM circulus radii a tangens rectam AP in A; erit

$$y=a-\sqrt{(a^2-x^2)} \quad \text{et} \quad p=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \quad \text{atque} \quad \sqrt{(1+pp)}=\frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Fiet ergo

$$\int\frac{p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}=\int\frac{x\,dx}{a}=\frac{x^2}{2a},$$

ad quod constantem addere non licet, quia $\frac{1+pp}{pp}=\frac{a^2}{x^2}$ fit infinitum evanescente x. Erit ergo

$$k\frac{(1+pp)}{pp}\int\frac{p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{ka}{2}=b+\int P\,dx;$$

quare celeritas corporis erit uniformis ideoque potentia sollicitans evanescit. Perspicuum enim est corpus a nulla potentia sollicitatum in peripheria circuli aequabiliter progredi eiusque vim centrifugam esse ubique eiusdem magnitudinis.

EXEMPLUM 3

237. Sit curva AM cyclois basin habens horizontalem et cuspide tangens verticalem AP in A, ita ut sit

$$dy=\frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}.$$

Habetur ergo

$$p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 + pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}.$$

Quare erit

$$\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$$

et

$$\frac{k(1+pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}.$$

Sumta ergo constante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$; quare fiat $C = 0$; erit

$$b + \int Pdx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$$

et $b = 0$. Prodibit igitur

$$P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}.$$

Si itaque corpus super cycloide AM ex A descendat ex quiete et sollicitetur deorsum a potentia, quae reciproce est ut radix quadrata ex abscissa AP, corpus ubique curvam aequali vi premet.

SCHOLION

238. Dantur igitur casus, quibus celeritatem $\sqrt{b}$ non pro lubitu assumere licet, quemadmodum in his exemplis evenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite magnum facto $x = 0$, constans in integratione ipsius $\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$ addenda plerumque hoc ipso determinatur, quod celeritas initialis non debeat esse infinite magna. Semper autem, si curva in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum posito $x = 0$, id quod in causa etiam est, quod in exemplis allatis celeritas initialis non sit arbitraria.

PROPOSITIO 27

PROBLEMA

239. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur, invenire curvam* AM (Fig. 32, p. 87), *super qua corpus ita movetur, ut tota pressio, quam curva sustinet, datam habeat rationem ad pressionem a vi normali ortam.*

SOLUTIO

Descendat corpus ex A celeritate debita altitudini b et posito $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$ sit potentia corpus in M sollicitans $=P$; erit altitudo debita celeritati, quam corpus in M habet, $=b+\int Pdx$, tota vero prossio, quam curva in M secundum directionem normalis MN sustinet,

$$=\frac{Pdy}{ds}+\frac{2ddy(b+\int Pdx)}{dxds}$$

sumto ds pro elemento constante. Iam habeat se haec pressio ad vim normalem $\frac{Pdy}{ds}$ ut m ad 1; erit

$$(m-1)Pdxdy=2ddy(b+\int Pdx),$$

quae est aequatio pro curva quaesita. Haec vero reducetur ponendo v loco $b+\int Pdx$ ad hanc formam

$$\frac{(m-1)dv}{v}=\frac{2ddy}{dy},$$

quae integrata dat

$$2l\frac{dy}{ds}=(m-1)l\frac{v}{a} \quad \text{seu} \quad v^{\frac{m-1}{2}}ds=a^{\frac{m-1}{2}}dy.$$

Ex qua habebitur

$$dy=\frac{v^{\frac{m-1}{2}}dx}{\sqrt{(a^{m-1}-v^{m-1})}}=\frac{dx(b+\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1}-(b+\int Pdx)^{m-1})}},$$

quae est aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

240. Celeritas corporis ibi est nulla, ubi $\frac{dy}{ds}=0$ seu ubi curvae tangens est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positivus seu si m maior fuerit unitate. In his igitur casibus curvam in A tangere ponemus rectam AP et celeritatem initialem seu $b=0$.

COROLLARIUM 2

241. Quare si $m>1$ seu si pressio tota maior est quam pressio a vi normali orta, curvam quaesitam dabit ista aequatio

$$dy = \frac{dx(\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1}-(\int Pdx)^{m-1})}},$$

in qua $\int Pdx$ ita debet accipi, ut evanescat posito $x=0$.

COROLLARIUM 3

242. Si $m=1$, vis centrifuga evanescet et propterea linea quaesita erit recta. Fit autem ex aequatione $ddy=0$, quae est proprietas lineae rectae.

COROLLARIUM 4

243. Si $m=0$, tum tota pressio evanescit; quare tum prodibit curva, quam corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro hac igitur curva habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{(b-a+\int Pdx)}.$$

COROLLARIUM 5

244. Si m est unitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi normali et propterea curva AM erit concava deorsum. Ponamus igitur in A curvam esse normalem ad AP; erit $b=a$. Posito igitur $b=a$ habebitur pro curva quaesita haec aequatio

$$dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}}dx}{\sqrt{((a+\int Pdx)^{1-m}-a^{1-m})}}.$$

COROLLARIUM 6

245. Pro motu libero igitur, quo casu est $m=0$, invenietur curva a corpore descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiiciatur, ex hac aequatione

$$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int Pdx}}.$$

EXEMPLUM 1

246. Sit vis sollicitans uniformis seu $P = g$; erit $\int P dx = gx$. Casibus ergo, quibus $m > 1$ et corpus in A ex quiete descendit, aequatio pro curvis quaesitis scripto gc loco a erit haec

$$dy = \frac{x^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(c^{m-1} - x^{m-1})}}.$$

At si sit $m < 1$ et corpus in A celeritate altitudini a debita proiiciatur horizontaliter, curva, super qua corpus moveri debebit, scripto gc loco a exponetur hac aequatione

$$dy = \frac{c^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m} - c^{1-m})}}.$$

Hae ergo curvae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$ vel $\frac{m}{1-m}$ fuerit numerus integer affirmativus. Hoc vero evenit, si m fuerit terminus vel ex hac serie $3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ etc.

COROLLARIUM 7

247. Si igitur tota pressio triplo debeat esse maior quam vis normalis, curva erit circulus tangens rectam AP in A. Namque erit

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} \quad \text{seu} \quad y = c - \sqrt{(c^2 - x^2)},$$

aequatio ad circulum radii c.

COROLLARIUM 8

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis seu vis centrifuga aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curva cyclois cuspide verticalem in A tangens. Aequatio enim erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}.$$

EXEMPLUM 2

249. Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curvae eiusmodi, ut pressio tota, quam curva sustinet, sit duplo maior quam vis normalis seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur $m = 2$ et pro curva quaesita haec habebitur aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a - \int Pdx)}}.$$

Seu dicto $\int Pdx = X$ erit

$$dy = dx\sqrt{\frac{X}{a-X}} = \frac{Xdx}{\sqrt{(aX - X^2)}}.$$

Hoc exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curvas huius proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

COROLLARIUM 9

250. Perspicitur ergo infinitas esse curvas quaestioni satisfacientes propter quantitatem a arbitrariam. Atque infinitae hae curvae omnes tangent rectam AP in A.

SCHOLION 1

251. Ex solutione huius problematis apparet, quomodo problema inversum, quo curva et ratio inter totam pressionem et vim normalem datur, at quantitas vis sollicitantis deorsum tendentis quaeritur, solvi debeat. Cum enim sit

$$v^{\frac{m-1}{2}}\,ds = a^{\frac{m-1}{2}}\,dy$$

seu posito $dy = pdx$

$$v^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{(1+pp)} = a^{\frac{m-1}{2}}\,p,$$

erit

$$v = \frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}} = b + \int Pdx$$

hincque differentiando

$$Pdx = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}}\,dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}.$$

Consequenter invenitur

$$P = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}}dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}dx}.$$

Ubi notandum celeritatem initialem iam esse datam; nam formula

$$\frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}},$$

si in ea ponatur $x = 0$, dat b.

SCHOLION 2

252. Simili modo, si motus corporis seu celeritas eius in singulis locis detur atque relatio pressionis totius ad vim normalem, invenietur ex celeritate statim potentia sollicitans. Ut sit v altitudo debita celeritati in M; erit ob $b + \int P dx = v$

$$P = \frac{dv}{dx}$$

atque aequatio

$$v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$$

dabit naturam curvae requisitae. Cum enim v sit data, dari debet vel in x vel s et constantibus quantitatibus, scilicet quae ad curvae naturam exprimendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypothesi virium contripetarum vel plurium potentiarum sollicitantium proposita non habent plus difficultatis, etiamsi ad magis perplexas aequationes perveniatur. Atque cum simplicia exempla in medium proferre non liceat ad illustrandum, ea potius relinquo, hocque eo magis, quod in sequentibus, ubi de brachystochronis agetur, eiusdem naturae curvae prodeant, quas ibi diligentius expositurus sum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quibus motus quaedam proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potentia sollicitante curva quaeritur vel cum curva ipsa potentia sollicitans. Problemata vero nimis facilia, ut quando vel scala celeritatum vel scala temporum daretur, praetermitto, cum ex expressione celeritatis vel potentia sollicitans vel ipsa curva sponte fluat atque temporis expressio facillime ad celeritatem deducat. Hanc ob rem huiusmodi afferemus quaestiones, in quibus non ipsae celeritates vel tempora dantur, sed relationes quaedam ab iis pendentes.

PROPOSITIO 28

PROBLEMA

253. *Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; invenire curvam AM* (Fig. 38), *super qua corpus descendens motu aequabili deorsum feratur seu aequabiliter a horizontali AB recedat.*

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et potentia sollicitante $= P$ sit celeritas corporis initialis in A debita altitudini b; erit celeritas in M debita altitudini $b + \int P dx$. Quare tempusculum, quo elementum Mm percurritur, est

$$\frac{ds}{\sqrt{(b + \int P dx)}}.$$

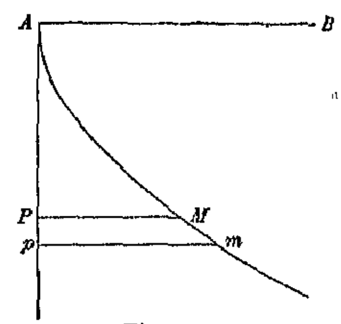


Fig. 38.

Quia autem motus per AM respondere debet motui aequabili per AP, concipiatur corpus motum super AP celeritate constante debita altitudini b; debebit tempus per Pp aequari tempori per Mm, unde habebitur

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$$

seu

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}.$$

Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, ut curva in A tangat verticalem AP et corpus primo principio recta descendat. Nam quia propter motum acceleratum necesse est, ut curva continuo magis ad horizontem inclinetur, eius initium commodissime sumetur in A, ubi curva est verticalis. Prodiitque ergo pro hac curva aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

254. Haec ergo curva hanc habet proprietatem, ut, quo maior sit corporis celeritas, eo magis quoque curva in eo loco ad horizontem sit inclinata.

COROLLARIUM 2

255. In loco ergo supremo, ubi celeritas corporis est minima, inclinatio curvae debet esse minima seu tangens curvae in eo loco debet esse verticalis.

COROLLARIUM 3

256. Celeritas igitur initialis $\sqrt{b}$ non potest esse nulla, quia ei aequalis est celeritas respectiva, qua corpus deorsum progreditur seu ab horizontali AB recedit.

SCHOLION 1

257. Vocatur haec curva *linea aequabilis descensus,* quia corpus super ea descendens aequabili motu deorsum progreditur. Lineae huius inventio extat in Act. Erud. Lips. A. 1689[1]) pro hypothesi gravitatis seu potentiae sollicitantis uniformis[2]). Satisfacere autem huic quaestioni demonstratur ibi parabola cubicalis Neiliana, quae eadem in exemplo sequente prodibit.

EXEMPLUM 1

258. Sit potentia sollicitans uniformis seu $P = g$; erit $\int P dx = gx$ Quare pro curva quaesita habebitur ista aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx},$$

quae integrata praebet hanc

$$3y\sqrt{b} = 2x\sqrt{gx} \quad \text{seu} \quad \frac{9by^2}{4g} = x^3,$$

1) Editio princeps: *A. 1690.* Correxit P. St.

2) G. W. Leibniz, *De linea isochrona, in qua grave sine acceleratione descendit,* Acta erud. 1689, p. 195; *Mathematische Schriften,* herausgegeben von C. I. Gerhardt, 2. Abteilung, Bd. 1, Halle 1858, p. 234. P. St.

quae est pro parabola NEILIANA cuspide in A verticalem AP tangente, cuius parameter est $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali alia est sumenda parabola.

EXEMPLUM 2

259. Sit potentia sollicitans P potestati cuicunque abscissarum data linea auctarum proportionalis ut

$$P = \frac{(a+x)^n}{f^n};$$

erit

$$\int P dx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Quamobrem pro curva satisfaciente habebitur ista aequatio

$$dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{((a+x)^{n+1} - a^{n+1})}.$$

Si $a=0$, ita ut potentia sollicitans P sit potestati exponentis n distantiarum corporis a horizontali AB proportionalis, erit

$$dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{x^{n+1}},$$

cuius integralis est

$$y\sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$$

seu

$$\frac{(n+1)(n+3)^2}{4} bf^n y^2 = x^{n+3}.$$

At $n+1$ debet esse numerus affirmativus; alioquin $\int P dx$ fieret infinitum, quia evanescere debet facto $x=0$. Fit ergo $n+3>2$; quare satisfaciunt parabolae verticibus in A verticalem AP tangentes. Ut, si $n=1$ seu $P=\frac{x}{f}$, satisfaciet parabola APOLLONIANA, cuius parameter est $2\sqrt{2bf}$.

SCHOLION 2

260. Ex huius propositionis solutione perspicitur, quomodo eius inversa [solvatur], qua data curva, quae sit linea aequabilis descensus, requiritur potentia sollicitans. Cum enim sit

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx},$$

erit

$$\int P dx = \frac{b\,dy^2}{dx^2}.$$

Ex qua oritur posito dx constante

$$P = \frac{2b\,dy\,ddy}{dx^3}.$$

Perspicitur ergo potentiam P a celeritate initiali $\sqrt{b}$ pendere. Curva vero data ita esse debet comparata, ut in A tangat verticalem AP. Si curvae radius osculi in M dicatur r, erit

$$P = \frac{2b\,ds^3\,dy}{r\,dx^4}.$$

Quare si ex. gr. curva AM fuerit circulus tangens AP in A, cuius radius $= a$, erit

$$r = a, \quad dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Pro circulo ergo erit

$$P = \frac{2a^2bx}{(a^2 - x^2)^2}.$$

Celeritas vero in M debita est altitudini

$$b + \int P dx = \frac{a^2 b}{a^2 - x^2}.$$

COROLLARIUM 4

261. Patet ceterum ex aequatione, quam invenimus [§ 253],

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$$

tempus, quo arcus AM describitur, aequale esse tempori, quo corpus uniformiter celeritate altitudini b debita abscissam AP percurrit. In hoc ipso scilicet natura lineae aequabilis descensus nititur.

PROPOSITIO 29

PROBLEMA

262. *Trahente uniformi potentia ubique verticaliter deorsum invenire curvam AM (Fig. 34), super qua corpus aequabiliter versus datam plagam AP progreditur.*

SOLUTIO

Sit AM curva quaesita et pro axe sumatur eius tangens AP, quae versus datam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, ut corpus super AM motum a potentia uniformi g sollicitatum eodem tempore ad M perveniat, quo corpus motu aequabili, nempe celeritate $\sqrt{b}$, latum abscissam respondentem AP percurrit, eritque celeritas initialis in A debita altitudini b. Dicantur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ ducaturque verticalis AQ in Q secans horizontalem MQ. Celeritas igitur corporis in M tanta erit, quantam in Q cadendo per AQ cum sua celeritate $\sqrt{b}$ acquireret; quare celeritas corporis in M debita erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Per conditionem problematis vero debet esse

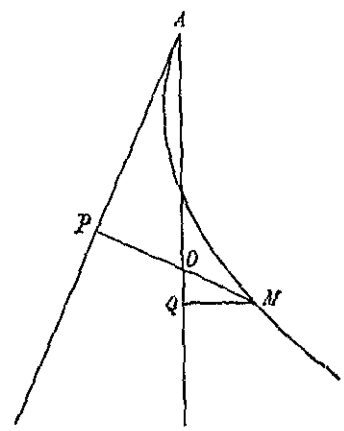


Fig. 34.

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}} \quad \text{seu} \quad \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}},$$

unde oritur haec aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gz}.$$

At z in x et y dabitur ex angulo PAQ; sit sinus huius anguli $= m$, erit cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit

$$\sqrt{(1-m^2)} : m = AP\,(x) : PO,$$

ex quo erit

$$PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}} \quad \text{ideoque} \quad MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)} - mx}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$

At AO fiet

$$=\frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$

Deinde ob $1:m = MO:OQ$ erit

$$OQ=\frac{my\sqrt{(1-m^2)}-m^2x}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$

Consequenter

$$AQ=z=my+x\sqrt{(1-m^2)}$$

et hinc

$$dy=\frac{dz}{m}-\frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}.$$

Quo valore in aequatione inventa substituto prodit

$$dz\sqrt{b}=dx\sqrt{b(1-m^2)}+m\,dx\sqrt{gz},$$

quae transit in hanc

$$dx=\frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz}+\sqrt{b(1-m^2)}}.$$

Cuius integralis invenitur

$$x=\frac{2\sqrt{bz}}{m\sqrt{g}}-\frac{2b\sqrt{(1-mm)}}{m^2g}\,l\,\frac{m\sqrt{gz}+\sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}\text{ [1]}.$$

Quae aequatio loco z valore $my+x\sqrt{(1-m^2)}$ substituto dat naturam curvae quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

263. Curva ergo satisfaciens semper est linea transcendens, nempe a logarithmis pendens, nisi sit m vel 0 vel 1, i. e. nisi recta AP vel sit verticalis vel horizontalis.

COROLLARIUM 2

264. Si igitur $m=0$, problema cum praecedente convenit; fit enim $z=x$ ideoque curva exprimetur hac aequatione

$$dy\sqrt{b}=dx\sqrt{gx},$$

quae dat parabolam cubicalem ut supra.

---

1) Editio princeps: $x=\frac{2\sqrt{bz}}{m^2g}-\ldots$ Correxit P. St.

COROLLARIUM 3

265. Si $m = 1$, fit linea AP horizontalis et $z = y$. Habetur ergo

$$dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}} \quad \text{seu} \quad x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}} \quad \text{seu} \quad x^2 = \frac{4by}{g}.$$

Haec ergo curva est ipsa proiectoria, quam corpus in A celeritate $\sqrt{b}$ horizontaliter proiectum libere describit. Haec enim curva, ut ex superiore libro [§ 567] intelligitur, hanc habet proprietatem, ut motus horizontalis sit aequabilis.

COROLLARIUM 4

266. Si x et y et consequenter z est valde parvum, erit

$$l\left(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}\right) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)} + \frac{m^3gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$$

quam proxime. Initium ergo curvae AM exprimetur hac aequatione

$$x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$$

seu ob $z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$ ista

$$y = \frac{2(my + x\sqrt{(1-m^2)})\sqrt{g(my + x\sqrt{(1-mm)})}}{3\sqrt{b(1-m^2)}},$$

quae reducitur ad hanc

$$\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{(1-m^2)})^3.$$

COROLLARIUM 5

267. Si $m = 1$ seu si linea AP est horizontalis et series logarithmo illi aequalis continuetur in infinitum haecque series loco illius substituatur, termini omnes prae infinitesimo ∞ evanescent. Dabit autem infinitesimus $z = 0$ seu $y = 0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quo-

que satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum; nam corpus super recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus eius horizontalis est aequabilis.

SCHOLION 1

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae prodit, si ponatur $m=1$, parabolam tantum praebeat et rectam horizontalem excludere videatur. Sed notandum est lineam rectam horizontalem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere, cum motus in ea sit aequabilis atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progrediatur. Perspicuum autem est aequationem nostram generalem hanc rectam comprehendere non posse, quia rectam AP nusquam tangit nisi in casu $m=1$, quo cum ea congruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro casu etiam $m=1$ linea recta non directe inveniri queat.

SCHOLION 2

269. Manifestum quoque est eadem opera problema latiori sensu acceptum solvi potuisse, si scilicet potentia sollicitans non uniformis, sed variabilis utcunque esset posita. Namque substituto P loco g et $\int Pdz$ loco gz in aequatione differentiali prodisset haec aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdz}$$

pro curva quaesita. Habet vero z eundem valorem quem ante. Quare si P ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit $\int Pdz$ vel integrari vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curva poterit construi; pervenietur enim ad hanc aequationem

$$dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{\int Pdz} + \sqrt{b(1-m^2)}},$$

in qua variabiles x et z sunt a se invicem separatae. Nolui autem problema nimis lata significatione confusum efficere. Quando enim latior significatio neque plus difficultatis habet in se neque ad peculiarem usum accommodari potest, eo relicto particulare tantum problema pertractare constitui. Propter eandem rationem sequens problema isochronae paracentricae in hypothesi tantum potentiae uniformis et deorsum directae resolvo.

PROPOSITIO 30

PROBLEMA

270. *In hypothesi potentiae sollicitantis uniformis et deorsum tendentis invenire curvam AM* (Fig. 35), *super qua corpus descendens aequabiliter a dato puncto C recedit.*

SOLUTIO

Sit AM curva quaesita; eius sumatur tangens CA, quae per datum punctum C transit; erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec celeritas tota ad recedendum a C impenditur, in aliis curvae elementis necesse est, ut celeritas sit maior, eo, quod eius tantum pars ad recessum insumitur. Punctum A ergo erit supremum curvae quaesitae. Sit igitur celeritas corporis in A debita altitudini b hacque celeritate concipiatur corpus per AP uniformiter moveri; debebit itaque hic motus cum descensu corporis super curva AM ita convenire, ut ad quaeque puncta P et M aequaliter ab C distantia simul perveniatur. Posita celeritate in M debita altitudini v ducatur $CP = CM = x$ et sit sinus ang. $PCM = t$ posito sinu toto $= 1$. Ducantur arcus circulares PM et pm centro C; erit $Mn = Pp = dx$ et ang. pCm sinus $= t + dt$. Quare erit

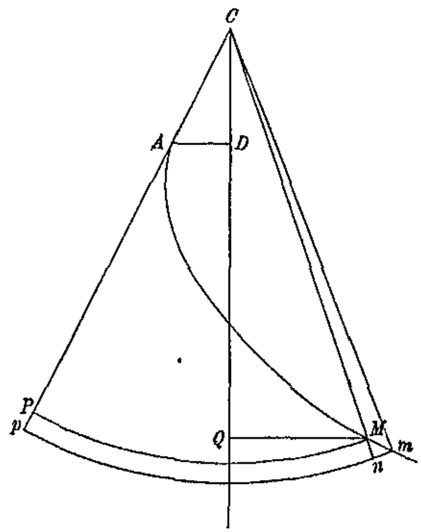


Fig. 35.

$$\text{sinus ang. } mCn = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{mn}{x}.$$

Erit igitur

$$mn = \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-tt)}} \quad \text{atque} \quad Mm = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{x^2\,dt^2}{1-tt}\right)}.$$

Cum ergo elementum Mm celeritate $\sqrt{v}$ eodem tempore describi debeat, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$, erit

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{v} + \frac{x^2 dt^2}{(1-tt)v}\right)}$$

seu

$$dx\sqrt{(1-tt)(v-b)} = xdt\sqrt{b}.$$

Requiritur ergo, ut v determinetur. Ad hoc ducatur ex C verticalis CQ et horizontales AD et MQ; postquam ergo corpus ex A ad M descendit, deorsum pervenit intervallo DQ. Quare posita potentia sollicitante $= g$ erit

$$v = b + g \cdot DQ = b + g \cdot CQ - g \cdot CD.$$

Sit $AC = a$, sinus anguli $ACD = m$; erit eius cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$, unde erit

$$CD = a\sqrt{(1-m^2)}$$

et

$$\text{cosinus ang. } MCQ = mt + \sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}.$$

Quam ob rem erit

$$CQ = mtx + x\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}.$$

Ex quibus conficitur

$$v = b - ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}.$$

Quo loco v valore substituto prodibit ista aequatio

$$dx\sqrt{(1-tt)}\left(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)}\right) = xdt\sqrt{b}$$

seu haec

$$\frac{dx}{x}\sqrt{\left(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)}\right)} = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-t^2)}}.$$

Quae aequatio exprimit naturam curvae quaesitae et, si indeterminatae x et t a se invicem separari possent, ipsa curva construi posset. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

271. Perspicuum igitur est ex aequatione inventa innumerabiles curvas quaesito satisfacere ob tres quantitates, angulum scilicet ACD, distantiam AC et celeritatem $\sqrt{b}$, qua corpus a fixo puncto C recedit, quae pro lubitu variari possunt.

COROLLARIUM 2

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis pro arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curvas quaesito satisfacientes. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curvae satisfacientes exhiberi non possunt.

COROLLARIUM 3

273. Quod ad figuram curvarum harum attinet, intelligitur eas omnes in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter enim curvae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet excepto casu, quo CAP fit linea horizontalis; tum enim haec ratio cessat.

COROLLARIUM 4

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aeque solvit problema ac iste AM. Invenitur enim eadem ex aequatione, si modo t seu angulus PCM accipitur negativus.

COROLLARIUM 5

275. Ex sola autem aequationis inventae inspectione perspicitur eam duobus casibus separationem indeterminatarum admittere, quorum alter est, si $a=0$, alter, si $m=1$. Illo scilicet casu evanescit distantia AC et punctum A in C incidit; hoc vero casu recta CP fit horizontalis. Hos igitur ambos casus in sequentibus duobus exemplis evolvemus.

EXEMPLUM 1

276. Incidat ergo punctum A in C, seu corpus descensum incipiat in ipso puncto C; fiet $a=0$. Hoc ergo casu aequatio pro curva quaesita abibit in hanc

$$\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}}=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}},$$

in qua indeterminatae a se invicem sunt separatae. Constructio igitur curvae

quaesitae per quadraturas confici poterit; fiet enim

$$\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}},$$

quae integratio ita debet absolvi, ut facto $t=0$ fiat $x=0$. Namque generalis aequatio ita debet integrari, ut posito $t=0$ fiat $x=a$. Hoc igitur casu integrale

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$$

ita est accipiendum, ut facto $t=0$ ipsum evanescat. Ad constructionem huius integralis vero melius perspiciendam pono cosinum anguli MCQ seu

$$mt+\sqrt{(1-m^2)(1-tt)}=q,$$

quo facto fiet sinus ang. MCm seu

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}.$$

Hisque substitutis habebitur ista aequatio

$$\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=\int\frac{-dq}{\sqrt{(q-q^3)}},$$

quod integrale ita est accipiendum, ut facto $q=\sqrt{(1-m^2)}$ fiat $x=0$.

COROLLARIUM 6

277. Si ipsi b diversi valores attribuantur, omnes curvae, quae oriuntur, erunt inter se similes; manente enim angulo MCP distantia CM proportionalis est accipienda ipsi b, altitudini generanti celeritatem initialem.

COROLLARIUM 7

278. Quicunque ergo fuerit angulus ACQ, constructio non immutatur, sed tantum constans adiicienda. Quare constructio inserviens uni casui ad omnes casus potest accommodari.

SCHOLION 1

279. Problema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo iam erat propositum et solutum in Act. Lips. A. 1694[1]) atque solutiones, quae ibi extant, conveniunt apprime cum casu huius exempli; universalis enim solutio illo loco non est data.[2]) Quamobrem casus exempli sequentis novas prorsus dare videtur curvas huic quaestioni satisfacientes. At quia sequens constructio cum hac convenit, quanquam ipsae curvae sint prorsus differentes, tamen etiam sequens casus in iis, quae hac de re tradita sunt, contineri censendus est. Vocantur autem istiusmodi curvae *isochronae paracentricae,* quia motus super iis a centro fixo fit aequabilis.

EXEMPLUM 2

280. Sit linea CAP horizontalis; fiet $m=1$ atque in aequatione generali evanescet terminus $ga\sqrt{(1-m^2)}$. Hoc igitur casu aequatio fit ut ante separabilis; transmutabitur enim generalis aequatio in hanc

$$\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}}=\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}\quad\text{seu}\quad\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}},$$

quod integrale ita est accipiendum, ut posito $t=0$ fiat $x=a$. Quare $\int\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ ita integrato, ut evanescat posito $t=0$, erit

$$\frac{2\sqrt{gx}-2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}.$$

Quae constructio ergo cum praecedente convenit.

---

1) Editio princeps: *A. 1695.* Correxit P. St.

2) IAC. BERNOULLI, *Solutio problematis* LEIBNITIANI, *de curva accessus et recessus aequabilis a puncto dato, mediante rectificatione curvae elasticae,* Acta erud. 1694, p. 276; *Opera,* Genevae 1744, p. 601.

IAC. BERNOULLI, *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cuiusdam algebraicae,* Acta erud. 1694, p. 336; *Opera,* Genevae 1744, p. 608.

G. W LEIBNIZ, *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica,* Acta erud. 1694, p. 364; *Mathematische Schriften,* herausgegeben von C. I. GERHARDT, 2. Abteilung, Band 1, Halle 1858, p. 309; vide etiam IAC. BERNOULLI, *Opera,* Genevae 1744, p. 627.

IOH. BERNOULLI, *Constructio facilis curvae recessus aequabilis a dato puncto, per rectificationem curvae algebraicae,* Acta erud. 1694, p. 394; *Opera omnia,* Tom. I, Lausannae et Genevae 1742, p. 119. P. St.

SCHOLION 2

281. An praeter hos duos casus alii inveniri queant, qui separationem indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine quidem, quantum scio, alius est erutus, quamobrem non necesse esse iudico, ut huic materiae diutius immorer.

PROPOSITIO 31

PROBLEMA

282. *Potentia sollicitante existente uniformi et deorsum tendente invenire curvam AM* (Fig. 36), *super qua corpus data cum celeritate initiali ita moveatur, ut aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum C absolvat.*

SOLUTIO

Sumatur initium curvae in loco quodam A, in quo recta CA in ipsam curvam est normalis, sitque celeritas in A debita altitudini b et $AC = a$; erit celeritas angularis ut $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati celeritas angularis in singulis punctis M expressa debet esse aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini v et $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiet ut

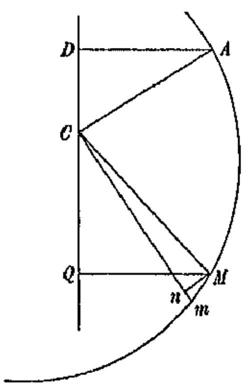


Fig. 36.

$$Mm : Mn = \sqrt{v} : \frac{Mn \cdot \sqrt{v}}{Mm},$$

quae quantitas per MC divisa dat celeritatem angularem

$$= \frac{Mn \cdot \sqrt{v}}{Mm \cdot MC};$$

quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$, habebitur haec aequatio

$$Mn \cdot a\sqrt{v} = Mm \cdot MC \cdot \sqrt{b} = Mm \cdot x\sqrt{b}.$$

Sit iam ducta verticali DCQ sinus ang. $ACD = m$, erit cosinus eius $= \sqrt{(1 - m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCD sit $= t$; erit co-

sinus $=\sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit

$$CD = a\sqrt{(1-m^2)} \quad \text{et} \quad CQ = -x\sqrt{(1-tt)}$$

atque

$$\text{sinus ang. } MCm = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x},$$

unde fit

$$Mn = \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-tt)}} \quad \text{et} \quad Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - tt\,dx^2 + x^2dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

At quia corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit

$$v = b + g\cdot DQ = b + ga\sqrt{(1-m^2)} - gx\sqrt{(1-tt)}.$$

Quibus valoribus in aequatione inventa substitutis orietur haec aequatio

$$b\,dx^2(1-tt) = a^2b\,dt^2 + ga^3dt^2\sqrt{(1-m^2)} - ga^2x\,dt^2\sqrt{(1-tt)} - bx^2dt^2$$

seu

$$dx\sqrt{b} = \frac{dt\sqrt{\left(a^2b + ga^3\sqrt{(1-m^2)} - ga^2x\sqrt{(1-tt)} - bx^2\right)}}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

Quae aequatio ita integrata, ut posito $t=m$ fiat $x=a$, exprimit naturam curvae quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

283. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introducantur fiatque $\sqrt{(1-m^2)}=n$ et $\sqrt{(1-tt)}=q$, erit

$$dx\sqrt{b} = \frac{-dq\sqrt{(a^2b + gna^3 - ga^2qx - bx^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$$

seu

$$\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b(a^2-x^2) + ga^2(na-qx))}},$$

quae ita est integranda, ut posito $q=n$, fiat $x=a$.

COROLLARIUM 2

284. Ubi curva ad radium CM est normalis, ibi ob evanescens dx erit

$$b(a^2-x^2) = ga^2(qx-na).$$

Quoties ergo est

$$q = \frac{a^2 b + gna^3 - bx^2}{ga^2 x},$$

erit curva in radium CM normalis. Quia autem q intra limites $+1$ et -1 continetur, x non potest esse maior data quantitate; nam posito $x = \infty$ fieret $q = \infty$, quod esset absurdum.

COROLLARIUM 3

285. Si CM est normalis in curvam, erit celeritas angularis

$$= \frac{\sqrt{v}}{MC} = \frac{\sqrt{(b + gna - gqx)}}{x},$$

quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Maxima ergo est illa celeritas angularis, si $q = -1$. Ille autem motus angularis eo fit minor, quo maior est x. Eo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliqua est curva ad radium MC. Quare curva non ultra datam distantiam infra C descendere poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione

$$x\sqrt{b} = a\sqrt{(b + gna + gx)},$$

nempe

$$x = \frac{ga^2}{2b} + a\sqrt{\left(\frac{g^2 a^2}{4b^2} + \frac{gna}{b} + 1\right)}.$$

Haec ergo est maxima curvae a puncto C distantia.

COROLLARIUM 4

286. Cum igitur curva non ultra datam distantiam a centro fixo C distare queat, curva haec erit in se rediens. Scilicet vel post unam revolutionem vel post duas vel post tres etc. vel etiam post infinitas revolutiones in se redibit, prout litterae a, b, n et g fuerint assumtae.

EXEMPLUM

287. Si potentia sollicitans evanescit, fit $g = 0$ et corpus aequabiliter promovebitur. Tum igitur pro curva descripta haec habebitur aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1 - tt)}},$$

cuius integralis per logarithmos est

$$\sqrt{-1}\, l\left(\frac{x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)}}{c}\right)=\sqrt{-1}\, l(t\sqrt{-1}-\sqrt{(1-tt)})$$

seu

$$x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)}=ct\sqrt{-1}-c\sqrt{(1-tt)}.$$

Quae reducta dat

$$(a^2-c^2)^2=4(a^2+c^2)ctx-4c^2x^2-4a^2c^2t^2.$$

Incidat recta AC in verticalem CD; hoc enim perinde est ob evanescentem potentiam g; debebit ergo fieri $x=a$ posito $t=0$, ex quo fit $a^2+c^2=0$ atque

$$a^4=a^2x^2+a^4t^2 \quad \text{seu} \quad x^2=a^2(1-tt).$$

Quae aequatio est pro circulo diametri a per punctum fixum C transeunte. Quando enim motus in circulo est aequabilis, motus quoque respectu cuiusque puncti in peripheria erit aequabilis.

SCHOLION

288. Perspicuum autem est hoc casu peripheriam circuli quoque satisfacere, cuius centrum est in puncto fixo C, quippe quae solutio est facillima et sua sponte se prodit. Quamobrem maxime mirandum est hunc casum in solutione non contineri. Ratio vero huius similis prorsus est eius, quam supra § 268 dedimus, ubi simile paradoxum observavimus. Ad circulum centrum in C habentem designandum prodire debuisset $x=a$ seu $dx=0$, quod vero, quia x ut quantitas variabilis consideratur, non fieri potuit, praesertim cum in eadem aequatione solutio alia sit contenta, in qua x est quantitas revera variabilis. Ex prima vero aequatione posito $v=b$, quae est $Mn\cdot a=Mm\cdot x$, intelligi potest circulum satisfacere; nam si ubique est $x=a$, erit quoque $Mn=Mm$. Magnum autem arbitror subsidium ad construendas curvas huic problemati satisfacientes proditurum, si tali methodo solutio inveniri posset, quae sponte pro casu motus aequabilis circulum centrum in C habentem esset datura. Cum enim casus simplicissimus ita sit involutus et abditus, ut elici vix queat, coniicere licet alias saepe curvas simplices in generali quapiam solutione contineri, quae sint erutu difficillimae.

PROPOSITIO 32

PROBLEMA

289. *Si corpus attrahatur vi quacunque ad centrum virium C (Fig. 37), invenire curvam AM, super qua corpus data cum celeritate descendens motu aequabili versus C feratur.*

SOLUTIO

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini b, erit recta CA tangens curvae in A, quia corpus in A directe ad C moveri debet. Sit $AC = a$ et $CM = x$, celeritas in M debita altitudini v et vis centripeta in $M = P$; erit $v = b - \int Pdx$, quod integrale ita est accipiendum, ut facto $x = a$ evanescat fiatque $v = b$. Celeritas vero in M tanta esse debet, qua elementum Mm eodem tempusculo absolvatur, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$. Erit ergo $\sqrt{b} : \sqrt{v} = Pp : Mm = MT : MC$, unde prodibit ista aequatio

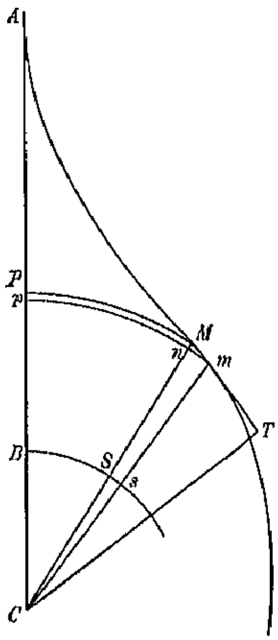


Fig. 37.

$$b\cdot MC^2 = v\cdot MT^2 = b\cdot MT^2 - MT^2\cdot\int Pdx.$$

Dicatur perpendiculum CT in tangentem $= p$; erit

$$bp^2 = -(x^2 - p^2)\int Pdx \quad \text{seu} \quad p^2 = \frac{-x^2\int Pdx}{b - \int Pdx}.$$

Vel si sinus ang. ACM ponatur $= t$, erit

$$\frac{mn}{MC} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

Unde sequens emergit aequatio

$$\frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}\sqrt{-\int Pdx}.$$

Quarum utraque, si quidem P per x datur, ad curvam construendam est apta. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

290. Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportionalis, nempe

$$P = \frac{x^n}{f^n},$$

erit

$$\int P dx = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Hoc substituto habebitur pro curva AM sequens aequatio

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}\sqrt{\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n}}.$$

Quae aequatio ita debet integrari, ut facto $t=0$ fiat $x=a$.

COROLLARIUM 2

291. Si $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiatur, ut fiat $=0$, si $t=0$, prodibit ex illa aequatione integrata haec

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-2\sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{bf^n}} + \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{bf^n}}\, l\, \frac{a^{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}} = BS,$$

si centro C radio $BC=1$ descriptus fuerit arcus circuli BSs. Ex quo patet curvam AM infinitos habere gyros, antequam corpus in C perveniat. Nam posito $x=0$ fit $BS=\infty$.

COROLLARIUM 3

292. Pendet igitur constructio huius curvae partim a quadratura circuli, partim a logarithmis, si $n+1$ est numerus affirmativus. At si $n+1$ est numerus negativus, is terminus, qui per logarithmos erat datus, ad quadraturam circuli quoque reducitur.

COROLLARIUM 4

293. Curva haec punctum habebit flexus contrarii, ubi est $dp=0$. Ad hoc igitur inveniendum sumatur aequatio

$$pp = \frac{-x^2 \int P dx}{b - \int P dx},$$

ex qua differentiata positoque $dp = 0$ prodibit

$$bPx = 2\left(\int P dx\right)^2 - 2b\int P dx.$$

COROLLARIUM 5

294. In casu igitur, quo $P = \frac{x^n}{f^n}$, punctum flexus contrarii ibi erit, ubi est

$$(n+1)^2 b f^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1) b f^n (a^{n+1} - x^{n+1}).$$

Unde haec oritur aequatio

$$\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = -\frac{(n+3)bf^n}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{((n+3)^2 b^2 f^{2n} + 8a^{n+1} b f^n)}.$$

Quae in integrali substituta dabit angulum ACM, in quo est punctum flexus contrarii.

SCHOLION 1

295. Cum autem de natura huiusmodi curvarum difficile sit in genere quicquam producere, ad casus speciales descendendum erit principales, id quod in sequentibus exemplis efficere visum est.

EXEMPLUM 1

296. Sit vis centripeta ipsis distantiis proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$, fiet $n = 1$. Posito ergo arcu $BS = s$ curva quaesita exprimetur ista aequatione

$$s = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}}\, l\, \frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ex qua aequatione data quavis puncti M a C distantia reperitur angulus BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Inter distantiam $MC = x$ vero et perpendiculum $CT = p$ aequatio haec erit

$$pp = \frac{a^2 x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}.$$

Huius curvae punctum flexus contrarii erit, ubi est $dp = 0$, hoc autem, ubi est

$$x^4 = 2a^2x^2 + 4bfx^2 - a^4 - 2a^2bf$$

seu

$$xx = a^2 + 2bf - \sqrt{(2a^2bf + 4b^2f^2)},$$

quia x non maior esse potest quam a. Hinc fit

$$x = \sqrt{\left(a^2 + 2bf - \sqrt{(2a^2bf + 4b^2f^2)}\right)}$$

atque

$$\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(2a^2 + 4bf)} - 2\sqrt{bf}}{\sqrt{(2a^2 + 4bf)}}.$$

Anguli ergo, quem curva in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM, cosinus erit

$$= \frac{\sqrt[4]{4bf}}{\sqrt[4]{(2a^2 + 4bf)}}.\,^{1)}$$

Aequatio vero curvae in seriem conversa erit posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$ haec

$$s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} + \text{etc.}$$

In ipso ergo curvae principio, ubi x non multo minor est quam a seu y valde parvum, erit

$$s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}.$$

Deinde ex ipsa aequatione apparet facto $x = 0$ fore $s = \infty$, quare curva infinitis spiris ambit centrum C, eritque, quando corpus centro iam proximum est,

$$\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}.$$

Ex quo sequitur proxime circa centrum C curvam abire in logarithmicam spiralem.

---

1) Editio princeps: $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2bf + b^2f^2)}$, *quia x non maior esse potest quam a. Hinc fit* $x = \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, *atque* $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2 + bf)}}$. *Anguli ergo, quem curva in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM cosinus erit* $= \frac{\sqrt[4]{bf}}{\sqrt[4]{(a^2 + bf)}}$. Correxit P. St.

EXEMPLUM 2

297. Sit $n = -1$ seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aequatione differentiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$

$$\int P dx = f l \frac{x}{a},$$

unde habebitur ista aequatio

$$ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}} \sqrt{f l \frac{a}{x}},$$

cuius integralis est

$$s = \frac{2f(la - lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}.$$

Altera aequatio inter perpendiculum p et x erit haec

$$pp = \frac{fxx l \frac{a}{x}}{b + f l \frac{a}{x}}.$$

Ex qua invenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo est

$$b = 2f\left(l\frac{a}{x}\right)^2 + 2bl\frac{a}{x}$$

seu

$$l\frac{a}{x} = \frac{-b + \sqrt{(bb + 2bf)}}{2f}.$$

Hoc ergo habebitur sumendo

$$s = \frac{\left(-b + \sqrt{(bb + 2bf)}\right)^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2b}}.$$

Perspicitur porro, si fiat $x = 0$, fore $s = \infty$ seu curvam infinitis spiris centrum C circumdare; hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx} = 1$ seu $p = x$. Ultimo ergo curva in circulum infinite parvum abit.

EXEMPLUM 3

298. Ponatur $n = -2$, ut vis centripeta sit quadratis distantiarum reciproce proportionalis; erit

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-f dx}{x} \sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds.$$

Ponatur

$$\frac{a-x}{x} = yy,$$

fiet

$$\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yydy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}.$$

Exprimit vero $\int\frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; sit hic arcus $=t$, erit

$$t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

Ubique ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis differentiae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem posito radio $=1$. Si x ponatur $=0$, fiet $s=\infty$, ex quo sequitur curvam per infinitas spiras ad centrum C descendere. Praeterea ob

$$-\int Pdx = \frac{ff(a-x)}{ax}$$

erit

$$pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}.$$

Ex quo sequitur, si x evanescat, fore $\frac{pp}{xx}=1$ seu curvam ultimo quoque in circulum infinite parvum abire.

Si fuerit $ab=ff$, erit

$$pp = \frac{xx(a-x)}{a} \quad \text{et} \quad t + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

Punctum flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, ubi est $2ax = 3xx$ seu vel $x=0$ vel $x=\frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab=4ff$, erit

$$t+s = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

et punctum flexus contrarii habebitur capiendo [vel $x=0$ vel] $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

SCHOLION 2

299. Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si vis centripeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu

$$P = \frac{x^n}{f^n},$$

consideretur aequatio inter p et x, quae erit

$$\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1} - x^{n+1}}.$$

Ubi duo distinguendi sunt casus, alter, quo $n+1$ est numerus affirmativus, alter, quo est negativus.

Si $n+1$ est numerus affirmativus, facto $x=0$ fit

$$\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1}}.$$

Hoc ergo casu curva AM circa centrum C abit in logarithmicam spiralem.

At si $n+1$ est numerus negativus, facto $x=0$ fit

$$\frac{pp}{xx} = 1.$$

His ergo in casibus curva in C abit in circulum infinite parvum. Fit his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite magna et hanc ob rem, nisi curva in circulum abiret, corpus celeritate infinite magna ad C accederet, quod esset contra conditionem problematis. Determinatis igitur curvis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum virium accedit, investigabimus eas curvas, super quibus motu aequabili circa centrum virium circumfertur.

PROPOSITIO 33

PROBLEMA

300. *Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum virium C* (Fig. 38, p. 125), *determinare curvam AM, super qua corpus motu angulari circa centrum C aequabiliter movetur.*

SOLUTIO

Sit A curvae punctum supremum, ubi curva normalis erit in radium AC, sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et $AC = a$; erit motus angularis in $A = \frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati motus angularis in singulis punctis M debet esse aequalis. Ponatur $CM = x$, cui aequalis capiatur CP, et sit vis centri-

peta in $M = P$; erit celeritas in M debita altitudini $b - \int P dx$ integrali $\int P dx$ ita accepto, ut evanescat posito $x = a$. Ducta tangente MT vocetur perpendiculum ex C in eam demissum $CT = p$; erit $x : p = Mm : mn$. Hanc ob rem celeritas per mn

$$= \frac{p\sqrt{(b - \int P dx)}}{x}$$

et celeritas angularis

$$= \frac{p\sqrt{(b - \int P dx)}}{x^2},$$

quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit sequens aequatio

$$bx^4 = a^2bp^2 - a^2p^2\int P dx$$

seu

$$p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int P dx)}}.$$

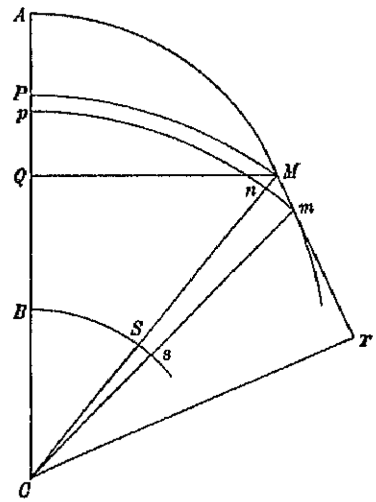


Fig. 38.

Centro C radio $BC = 1$ describatur arcus circuli BS, qui dicatur $= s$, erit $1 : ds = x : mn$, unde erit $mn = x ds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2 ds^2)}$. Cum nunc sit $x : p = \sqrt{(dx^2 + x^2 ds^2)} : x ds$, fiet

$$p = \frac{x x ds}{\sqrt{(dx^2 + x^2 ds^2)}}.$$

Quo valore in aequatione inventa substituto habebitur

$$b dx^2 + b x^2 ds^2 = a^2 b ds^2 - a^2 ds^2 \int P dx$$

hincque

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2 b - b x^2 - a^2 \int P dx)}}.$$

Ex qua aequatione curva quaesita poterit construi. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

301. Quo minor fit x, eo maior fiet $b - \int P dx$, quare, quo minor fit x, eo minor quoque fiet $\frac{p}{x}$ seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int P dx)}}$.

COROLLARIUM 2

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione x non potest fieri maior quam a; fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nullus potest esse normalis in curvam, nisi qui est maximus, nempe $= AC$.

SCHOLION 1

303. Per se quidem manifestum est in quacunque vis centripetae hypothesi circulum centro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo uniformiter moveri debebit. Etiamsi autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet, ut iam supra innuimus.

SCHOLION 2

304. Perspicuum autem est nullam aliam curvam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curvis fieri non potest, ut omnes rectae ex C eductae et in curvam normales sint inter se aequales. Quae igitur curvae praeter circulum problema solvunt, eae per ipsum centrum C transire debent, ut plus uno radio MC non sit in curvam normali. Cuiusmodi ergo sint hae curvae, in sequente exemplo videamus.

EXEMPLUM

305. Sit vis centripeta distantiis a centro directe proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$; erit

$$-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}.$$

Quo substituto pro curva sequens prodit aequatio

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{2f}\right)(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A.\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus $BS = t$, erit $s = A.t$; unde fiet

$$A.t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}} \cdot \left(A.1 - A.\frac{x}{a}\right).$$

Seu arcus, cuius cosinus est $\frac{x}{a}$, erit

$$= A.\, t\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}.$$

Unde constructio curvae facilis fluit eritque curva algebraica, quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est numerus rationalis. Sit

$$\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m \quad \text{seu} \quad 2bf = \frac{a^2}{m^2-1},$$

erit

$$\frac{mdt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

cuius integralis per logarithmos imaginarios est

$$ml(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)}) = l\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right)$$

seu

$$(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Demittatur ex M in AC perpendiculum $MQ = y$ et posito $CQ = u$ erit $1 : t = x : y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit

$$\left(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x}\right)^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Ut sit $m = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebitur ista aequatio

$$\left(\frac{y\sqrt{-1}+u}{x}\right)^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Quae reducta dat hanc

$$x^3 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^2$$

seu

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}} \quad \text{et} \quad u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}.$$

At si inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur, ea erit ordinis sexti haec

$$(y^2+u^2)^3 = a^2(u^2-y^2)^2.$$

COROLLARIUM 2

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione x non potest fieri maior quam a; fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nullus potest esse normalis in curvam, nisi qui est maximus, nempe $= AC$.

SCHOLION 1

303. Per se quidem manifestum est in quacunque vis centripetae hypothesi circulum centro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo uniformiter moveri debebit. Etiamsi autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet, ut iam supra innuimus.

SCHOLION 2

304. Perspicuum autem est nullam aliam curvam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curvis fieri non potest, ut omnes rectae ex C eductae et in curvam normales sint inter se aequales. Quae igitur curvae praeter circulum problema solvunt, eae per ipsum centrum C transire debent, ut plus uno radio MC non sit in curvam normali. Cuiusmodi ergo sint hae curvae, in sequente exemplo videamus.

EXEMPLUM

305. Sit vis centripeta distantiis a centro directe proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$; erit

$$-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}.$$

Quo substituto pro curva sequens prodit aequatio

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{2f}\right)(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A.\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus $BS = t$, erit $s = A.t$; unde fiet

$$A.t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}} \cdot \left(A.1 - A.\frac{x}{a}\right).$$

Seu arcus, cuius cosinus est $\frac{x}{a}$, erit

$$= A.\, t\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}.$$

Unde constructio curvae facilis fluit eritque curva algebraica, quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est numerus rationalis. Sit

$$\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m \quad \text{seu} \quad 2bf = \frac{a^2}{m^2-1},$$

erit

$$\frac{m\,dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

cuius integralis per logarithmos imaginarios est

$$m\,l(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)}) = l\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right)$$

seu

$$(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Demittatur ex M in AC perpendiculum $MQ = y$ et posito $CQ = u$ erit $1:t = x:y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit

$$\left(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x}\right)^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Ut sit $m = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebitur ista aequatio

$$\left(\frac{y\sqrt{-1}+u}{x}\right)^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Quae reducta dat hanc

$$x^3 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^2$$

seu

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}} \quad \text{et} \quad u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}.$$

At si inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur, ea erit ordinis sexti haec

$$(y^2+u^2)^3 = a^2(u^2-y^2)^2.$$

In hac curva applicata erit maxima, si $x=\frac{2b}{3}$ seu si sumatur

$$CQ=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{5}{6}}=a\sqrt{\frac{10}{27}};$$

tum enim erit

$$QM=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{2}{27}}.$$

In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit, ubi est

$$my\sqrt{(a^2-x^2)}=ux.$$

PROPOSITIO 34

PROBLEMA

306. *Sit potentia sollicitans uniformis g et ubique deorsum tendat deturque curva AT* (Fig. 39); *invenire curvam AM, super qua corpus ita descendat, ut tempus per arcum quemcunque AM proportionale sit radici quadratae ex applicata respondente PT curvae datae AT.*

SOLUTIO

Ponatur abscissa communis $AP=x$, curvae AT applicata $PT=t$; dabitur ergo, quia curva AT datur, aequatio inter x et t, quae talis esse debebit, ut evanescente x fiat quoque $t=0$, quia motus initium in A ponitur et tempora a puncto A computantur. Sit porro curvae quaesitae AM applicata $PM=y$ et arcus $AM=s$. Debita sit celeritas initialis in A altitudini b. Erit ergo celeritas in M debita altitudini $b+gx$ et tempus, quo arcus AM absolvitur,

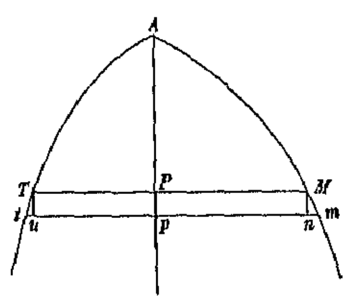


Fig. 39.

$$=\int\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}},$$

quod aequale esse debet ipsi $\sqrt{t}$. Habebitur ergo haec aequatio

$$\int\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}}=\sqrt{t}\quad\text{seu}\quad\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}}=\frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Unde
$$dt^2(b+gx) = 4tds^2 = 4tdx^2 + 4tdy^2$$
atque
$$dy = \frac{\sqrt{(bdt^2 + gxdt^2 - 4tdx^2)}}{2\sqrt{t}}.$$

Ex qua aequatione, cum t per x detur, curva quaesita AM construi poterit. Ita autem est construenda, ut posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$, quo curvae AM initium sit in A. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

307. Quo igitur curva sit realis, oportet, ut $bdt^2 + gxdt^2$ sit maius quam $4tdx^2$ seu
$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}} \quad \text{sive integrando} \quad \sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g}.$$

Si enim fuerit
$$\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g},$$
curva AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

COROLLARIUM 2

308. Si igitur in curva AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi tangens curvae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$ curva AM non eousque descendet, sed habebit punctum reversionis in eo loco, ubi tangens est verticalis.

COROLLARIUM 3

309. Si angulus, quem curva AT in A cum verticali AP constituit, fuerit acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A
$$t = mx \quad \text{et} \quad \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{mdx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}},$$

unde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper accidit, si b non fuerit $=0$. Tum autem erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(bm^2+gm^2x-4mx)}}{2\sqrt{mx}}.$$

Posito igitur $x=0$ fiet $\frac{dy}{dx}=\infty$, seu his casibus curvae AM tangens in A erit horizontalis, nisi sit $b=0$. At si $b=0$, erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(gm-4)}}{2}.$$

Ne igitur curva AM fiat imaginaria, debet gm maius esse quam 4 atque tum curva AM cum AP in A angulum acutum constituet, cuius tangens erit

$$\frac{\sqrt{(gm-4)}}{2}.$$

COROLLARIUM 4

310. Sin vero angulus, quem curva AT in A cum verticali AP facit, sit rectus, fit $m=\infty$. Hoc ergo casu curvae AM tangens in A semper erit horizontalis, sive b fit $=0$ sive secus.

COROLLARIUM 5

311. Si celeritas in A est $=0$ et in principio A curva AT confundatur cum curva, cuius aequatio est $t=\alpha x^n$ existente n numero affirmativo, quo crescente x quoque t crescat, erit

$$dt=\alpha n x^{n-1}dx \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx\sqrt{(\alpha^2 g n^2 x^{2n-1}-4\alpha x^n)}}{2\sqrt{\alpha x^n}}.$$

Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x=0$, debebit esse $n>2n-1$ seu $n<1$, quibus casibus scilicet curva AT in A est normalis ad AP. Tum vero erit in puncto A

$$dy = \frac{n\,dx\sqrt{\alpha g}}{2x^{\frac{1-n}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{nx^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\alpha g}}{n+1}$$

et radius osculi curvae AM in A

$$=\frac{n^2\alpha g x^n}{2(n-1)}.$$

Ex quo sequitur curvae AM, cuius tangens in A est horizontalis, radium osculi in A debere esse infinite parvum, si corpus ex quiete super ea descendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite parvus, corpus perpetuo in A quiescens permanebit.

COROLLARIUM 6

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curva AM fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{gx}}$, saltem in initio curvae AT. Quare si ponatur

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx,$$

ubi p est quantitas affirmativa, saltem nisi x ponatur nimis magnum, erit

$$\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int p\,dx,$$

ubi $\int p\,dx$ ita accipi debet, ut evanescat facto $x = 0$. Hoc autem valore loco $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ substituto prodibit

$$\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx \quad \text{seu} \quad s = x + \int p\,dx\sqrt{gx}$$

pro curva quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio

$$y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}.$$

Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int p\,dx$ praescripto modo acceptum fiat infinite magnum.

COROLLARIUM 7

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmativum retineat, tamdiu curvam AM descendere; si fit $p = 0$ et deinceps negativum, curva AM in illo loco habebit cuspidem et revertetur sursum. Si $p = \infty$ manente tamen $\int p\,dx$ finito, curva AM ibi habebit tangentem horizontalem.

COROLLARIUM 8

314. Si b non ponatur $=0$, ex eadem curva AT innumerabiles inveniri poterunt curvae AM; prout enim celeritas initialis maior minorve accipiatur, alia prodit curva AM.

SCHOLION

315. Problematis huius maximus erit usus in solutionibus sequentium problematum indeterminatorum, in quibus omnes curvae requiruntur, super quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curvam lineam perveniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius investigavimus, quo iis in sequentibus uti liceat.

PROPOSITIO 35

PROBLEMA

316. *Posita potentia sollicitante uniformi g et deorsum directa invenire omnes curvas AMC* (Fig. 40), *super quibus corpus in A ex quiete descensum incipiens dato tempore ad rectam horizontalem BC perveniat.*

SOLUTIO

Ponatur $AP=x$, $PM=y$ et $AB=a$. In curva AND exprimat PN supra sumtam quantitatem $\int p\,dx$, cuius curvae haec debet esse proprietas, ut in A cum axe AB concurrat eiusque applicatae continuo usque ad D saltem crescant, quo scilicet $p\,dx$ sit affirmativum. Nunc sumto

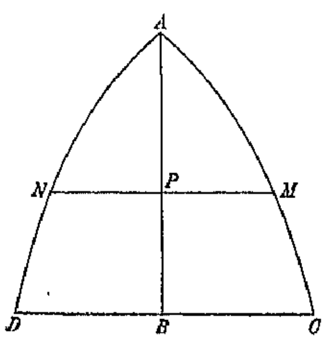


Fig. 40.

$$y=\int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx}+gppx)}$$

erit tempus per AMC

$$=\frac{2\sqrt{ga}}{g}+BD$$

(§ 312). Quamobrem cum infinitae curvae huius indolis in locum curvae AND substitui queant, ex iis infinitae orientur curvae AMC, super quibus omnibus

corpus eodem tempore ex A ad lineam horizontalem BC pertingit. Ad hoc ergo obtinendum pro $\int p\,dx$ talis quantitas accipi debet, quae evanescat posito $x=0$ et fiat $=BD$ posito $x=a$, retinente p ubique per AND affirmativum valorem. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

317. Si facto $x=a$ fiat $p=0$, seu si curva AND in D perpendiculariter insistat horizontali CD, curva AMC quoque horizontali DC perpendiculariter insistet.

COROLLARIUM 2

318. Atque si posito $x=0$ fiat quoque $p=0$, tangens curvae AMC in A erit verticalis; idem vero quoque accidit, si $p\sqrt{x}$ fiat $=0$ posito $x=0$. At si $p\sqrt{x}$ fiat infinitum posito $x=0$, curva AMC in A habebit tangentem horizontalem.

SCHOLION 1

319. Intelligitur ergo problema hoc maxime esse indeterminatum, cum infinitis modis infinitae curvae AMC possint inveniri. Quamobrem in sequentibus exemplis modum indicabimus quotcunque libuerit series infinitarum curvarum quaesito satisfacientium inveniendi.

EXEMPLUM 1

320. Ponatur $PN=\int p\,dx=z$ et $BD=\sqrt{b}$, ita ut tempus descensus esse debeat $=\frac{2\sqrt{ga}}{g}+\sqrt{b}$. Sumatur pro curva AND haec aequatio

$$z=\alpha x^2+\beta x,$$

quae hanc iam habet proprietatem, ut $\int p\,dx$ seu z evanescat posito $x=0$. Nunc quia facto $x=a$ fieri debet $z=\sqrt{b}$, habebitur $\sqrt{b}=\alpha a^2+\beta a$ hincque $\beta=\frac{\sqrt{b}}{a}-\alpha a$ ideoque

$$z=\alpha x^2+\frac{x\sqrt{b}}{a}-\alpha a x.$$

Deinde quia p seu $\frac{dz}{dx}$ affirmativum semper habere debet valorem, si $x<a$,

debebit esse $2\alpha x + \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$ affirmativum. Quare oportet esse $\sqrt{b} > \alpha a^2$; ponatur ideo $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \alpha a f$, erit $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{a^2 + af}$. Quo substituto habebitur

$$z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af},$$

quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affirmativis infinitas dat curvas AND. Fiet autem

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x\sqrt{b} + f\sqrt{b}}{a^2 + af} \quad \text{et} \quad p\sqrt{gx} = \frac{2x\sqrt{gbx} + f\sqrt{gbx}}{a^2 + af},$$

ex qua patet omnes hinc orientes curvas AMC tangere rectam AB in A. Aequatio vero pro curvis AMC erit haec

$$y = \int \frac{dx}{a^2 + af} \sqrt{\left(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx} + gbx(2x+f)^2\right)}.$$

Quae infinitas continet curvas problemati satisfacientes, super quibus omnibus tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$.

COROLLARIUM 3

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum sit

$$\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx,$$

erit

$$s = x + \int p\,dx\sqrt{gx}.$$

Est vero

$$\int p\,dx\sqrt{gx} = \frac{\frac{4}{5}x^2\sqrt{gbx} + \frac{2}{3}fx\sqrt{gbx}}{a^2 + af}.$$

Unde tota curva AMC erit

$$= a + \frac{\left(\frac{4}{5}a + \frac{2}{3}f\right)\sqrt{gab}}{a+f}.$$

COROLLARIUM 4

322. Inter has igitur curvas AMC longissima prodit, si $f=0$; erit enim tum

$$AMC = a + \frac{4}{5}\sqrt{gab}.$$

Et pro hac erit aequatio ista

$$y = \int \frac{2\,dx}{a^2}\sqrt{\left(a^2x\sqrt{gbx} + gbx^2\right)}.$$

Brevissima vero habetur facto $f=\infty$; tum enim erit

$$AMC = a + \frac{2}{3}\sqrt{gab}.$$

Et aequatio pro hac curva erit

$$y = \int \frac{dx}{a}\sqrt{\left(2a\sqrt{gbx} + gbx\right)}.$$

SCHOLION 2

323. Omnes curvae AND sub aequatione

$$z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af}$$

contentae sunt parabolae, adeo ut per solas parabolas innumerabiles inventae sint curvae problemati satisfacientes. Neque vero omnes parabolae in hac aequatione continentur, sed loco illius aequationis si adhibeatur haec

$$z^2 + z\sqrt{f} = \frac{x(b + \sqrt{bf})}{a},$$

quae etiam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curvae AMC inveniuntur, super quibus corpus dato tempore descensum absolvit. Ex quo intelligi potest, quoties infinitae inveniri queant curvae AMC, si tantum sectiones conicae in locum curvae AND substituantur. Sumta enim pro curvae AND hac aequatione

$$z^2 + \alpha z = \beta x^2 + \gamma x + \delta xz,$$

quae omnes continet sectiones conicas per punctum A transeuntes, fieri debet

$$b + \alpha\sqrt{b} = \beta a^2 + \gamma a + \delta a\sqrt{b}$$

atque

$$\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{2\beta a + \gamma + \delta\sqrt{b}}{\alpha + 2\sqrt{b} - \delta a}$$

debent esse quantitates positivae; quod quam infinitis modis fieri possit, facile perspicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae considerentur atque postmodum quoque curvae transcendentes simul, maxima copia curvarum simul descriptarum concipi poterit.

EXEMPLUM 2

324. Sumatur pro curva AND haec aequatio generalis

$$z = \frac{x^n\sqrt{b}}{a^n}$$

denotante n numerum affirmativum quemcumque; evanescet ergo posito $x = 0$ fietque $z = \sqrt{b}$ posito $x = a$, ut requiritur; praeterea vero quoque erit p seu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{nx^{n-1}\sqrt{b}}{a^n}$$

quantitas affirmativa. Cum igitur sit

$$p\sqrt{gx} = \frac{nx^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{a^n},$$

erit

$$y = \int \frac{dx}{a^n}\sqrt{(2na^nx^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{gb} + n^2gbx^{2n-1})}.$$

Quae aequatio infinitas curvas AMC complectitur, quae omnes erunt rectificabiles. Erit enim

$$AM = x + \frac{2nx^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{(2n+1)a^n}$$

ideoque

$$AMC = a + \frac{2n\sqrt{gab}}{2n+1}.$$

COROLLARIUM 5

325. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$, erit

$$y = \int \frac{dx\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}} \quad \text{atque} \quad y = \frac{x\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$$

et

$$AM = x\left(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a}\right).$$

Quare curva abit in lineam rectam inclinatam, super qua descensus fit tempore $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Perspicitur ergo dari lineas breviores recta hac inclinata, super quibus corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC pervenit; facto enim $n < \frac{1}{2}$ linea AMC fit brevior.

SCHOLION 3

326. Ceterum si detur unica curva AND desideratam curvam AMC praebens, ex ea ipsa innumerabiles aliae poterunt inveniri. Data enim unica aequatione inter z et x capiatur

$$PN = \frac{(ma - (m-1)x)z}{a},$$

unde pro diverso ipsius m valore innumerabiles curvae orientur. Simili modo poni etiam potest

$$PN = \frac{(max^n - (m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}};$$

fit enim $PN = z = \sqrt{b}$, si ponatur $x = a$. Atque generaliter, si fuerit P functio quaecunque ipsarum x et z, A vero eadem functio, quae prodit facto $x = a$ et $z = \sqrt{b}$, accipi poterit

$$PN = \frac{Pz}{A}.$$

Debebit autem P talis esse functio, ut Pz evanescat facto $x = 0$ et $z = 0$, et diff. PN divisum per dx debet esse quantitas affirmativa, saltem quamdiu est $x < a$.

SCHOLION 4

327. Simili modo problema generalissime solvetur, si designante P quamcunque functionem ipsius x evanescentem, si est $x=0$, et A eam quantitatem, in quam abit P, si fit $x=a$, sumatur

$$z=\frac{P\sqrt{b}}{A}$$

pro generalissima aequatione curvae AND. Sit deinde $dP=Qdx$, debebit Q esse quantitas affirmativa, quamdiu x non superat a; erit $p=\frac{Q\sqrt{b}}{A}$ atque hinc

$$y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AQ\sqrt{gbx}+gbQQx)},$$

quae est generalissima aequatio pro curvis AMC, quae omnes a corpore descendente proposito tempore absolventur. Apparet hoc modo curvas transcendentes quoque in locum curvarum AND substitui posse, quibus casibus tempus, quo quaevis curvae AMC portio absolvitur, algebraice non potest definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $=R$, erit

$$y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AR+RR)}.$$

Sumta ergo loco R quacunque functione ipsius x ad inveniendam A integrari debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$, ita ut evanescat posito $x=0$; deinde poni oportet $x=a$, et quod provenit, erit $=A$. Hic vero hoc tantum est monendum, ut pro R sumatur quantitas affirmativa, quamdiu x non excedit a, et caveri debet, ne $\int\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum, si praescripto modo accipiatur.

PROPOSITIO 36

PROBLEMA

328. *Posita potentia sollicitante uniformi g et ubique deorsum directa invenire omnes curvas AMC* (Fig. 41, p. 139), *super quibus corpus ex A dato tempore ad rectam BC ad horizontem utcunque inclinatam descendat.*

SOLUTIO

Exprimat curvae AND applicata BD tempus, quo corpus ex A ad rectam BC pertingit, et ducta per quodvis punctum M recta MQ parallela

rectae datae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus, quo corpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curvae AND concipiantur, quae omnes in B eandem habeant applicatam BD, hae omnes generabunt curvas AMC, super quibus corpus dato tempore ab A ad rectam BC pervenit. Curvae autem AND, ut supra monitum, concurrere debent in A cum verticali AB et usque ad D divergere debent ab AB. Ponatur nunc tangens anguli $ABC = k$ sitque $AP = x$, $PM = y$, $AQ = u$, $QN = t$ et $AB = a$; erit $PQ = \frac{y}{k}$ ideoque

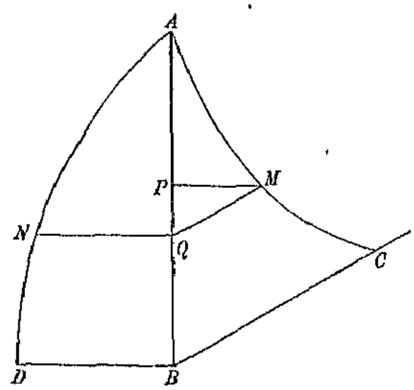


Fig. 41.

$$x + \frac{y}{k} = u.$$

Quia autem celeritas in M debita est altitudini gx, erit tempus per AM

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}},$$

quod aequale esse debet ipsi $QN = t$; erit adeo

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}} \quad \text{et} \quad gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2.$$

At ob curvam AND datam dabitur t in u, et cum sit $u = x + \frac{y}{k}$, dabitur t per x et y; quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curva quaesita AMC. Vel cum sit $y = ku - kx$, erit

$$gx\,dt^2 = (k^2 + 1)\,dx^2 - 2k^2\,du\,dx + k^2\,du^2,$$

ex qua aequatione x per u invenire licebit. Sit ad hoc $dt = p\,du$, erit

$$gxp^2\,du^2 = (k^2 + 1)\,dx^2 - 2k^2\,du\,dx + k^2\,du^2$$

atque

$$dx = \frac{k^2\,du \pm \sqrt{((g(k^2 + 1)p^2 x - k^2)\,du^2)}}{k^2 + 1}.$$

Curva igitur AND talis accipi debet, ut ubique p maius sit quam

$$\frac{k}{\sqrt{gx(k^2 + 1)}}.$$

Aequatio illa autem ita debet integrari, ut facto $u = 0$ fiat $x = 0$. Quo facto quoque eruetur aequatio inter x et y pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

329. Curva AMC tanget in A rectam AB, si fit $dy = 0$ posito $x = 0$; tum vero debebit esse $du = dx$ atque $1 = \sqrt{(g(k^2+1)p^2x - k^2)}$. Quare hoc eveniet, si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x = 0$. Quia autem hoc casu est y infinities minor quam x, erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequitur curvam AMC in A tangere verticalem AB, si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito $u = 0$.

COROLLARIUM 2

330. Deinde curva AMC normalis erit in QM, si fuerit $PQ = \frac{y}{k} = \frac{ydy}{dx}$ seu $dx = kdy = k^2du - k^2dx$ sive $dx = \frac{k^2du}{k^2+1}$. Hoc vero eveniet, ubi erit

$$p^2x = \frac{kk}{g(k^2+1)}.$$

COROLLARIUM 3

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum valorem cumque maiorem quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit facto $x = 0$ vel infinito magnum. In posteriore casu erit $dx = \pm\infty\, du$, et cum sit $du = dx + \frac{dy}{k}$, erit $dy = -kdx$. Quibus casibus tangens curvae AMC in A parallela erit rectae BC.

EXEMPLUM

332. Sit curva AND parabola quaecunque, ita ut sit

$$t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{g}};$$

erit

$$dt = \frac{\alpha du}{\sqrt{gu}} \quad \text{et} \quad p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}},$$

unde habebitur ista aequatio

$$(k^2+1)dx - k^2du = \pm\frac{du\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}}{\sqrt{u}}.$$

Huius aequationis integralis est

$$C = \left(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u}\right)^\pi \left(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + B\sqrt{u}\right)^\varrho$$

existente

$$A = \frac{\alpha^2 + \sqrt{(\alpha^4 - 4(1-\alpha^2)k^2)}}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\alpha^2 - \sqrt{(\alpha^4 - 4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$$

et

$$\pi = \frac{-2A}{A-B} \quad \text{atque} \quad \varrho = \frac{2B}{A-B}.$$

[Si est $\alpha < 1$, fit B et hinc quoque ϱ numerus positivus.] Cum igitur sit π numerus negativus, erit

$$C\left(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u}\right)^{-\pi} = \left(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + B\sqrt{u}\right)^\varrho,$$

ubi C denotat constantem, quae efficiat, ut posito $x = 0$ fiat $u = 0$. Manifestum autem est, quaecunque fuerit constans, semper fieri $u = 0$ posito $x = 0$, excepto casu, quo ϱ vel π evanescit. At π evanescere non potest, ϱ vero evanescit casu, quo $\alpha = 1$; hoc igitur casu debet esse $C = \infty$ fietque

$$\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + \alpha^2\sqrt{u} = 0$$

seu $u = x$ et $y = 0$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB. Reliquis casibus vero ob C arbitrariam quantitatem ex unica curva AND innumerabiles curvae AMC inveniuntur.

Unicus porro casus est seorsim tractandus, si $A = B$ seu

$$k^2 = \frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)};$$

tum enim erit

$$lu = C - 2l\left(r \mp \frac{\alpha^2}{2}\right) \pm \frac{\alpha^2}{r \mp \frac{\alpha^2}{2}}$$

existente

$$r = \frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}}{\sqrt{u}}.$$

Consequenter pro hoc casu habebitur haec aequatio

$$C = 2l\left(\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}\right) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}},$$

ubi C quoque determinatione non opus habet.

Si est $\alpha > 1$, fit B et hinc quoque ϱ numerus negativus; tum ergo debet esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel

$$A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}$$

vel

$$B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}.$$

Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo inclinatis et per A transeuntibus haeque etiam generaliter satisfaciunt. Ut si fuerit $\alpha = 1$, erit $A = 1$ et $B = 0$ hincque hae aequationes

$$u = x \quad \text{seu} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad u = \frac{(k^2+1)x}{kk} = x + \frac{y}{k} \quad \text{seu} \quad x = ky,$$

quae est linea recta perpendicularis in BC; haec enim a corpore eodem tempore percurritur quo verticalis AB.

COROLLARIUM 4

332[a] [1]). Nisi igitur sit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles lineae curvae inveniuntur problemati satisfacientes; quae ergo omnes minore tempore absolventur quam perpendicularis AB.

COROLLARIUM 5

333. Cum ergo ex unica curva AND infinitae oriri queant curvae AMC, facile intelligitur infinities plures curvas huic quaestioni satisfacere quam praecedenti.

COROLLARIUM 6

334. Si $\alpha < 1$, effici potest determinanda constante C, ut curva quaesita per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis assumendis curvis AND simili modo infinitae curvae poterunt inveniri, super quibus corpus non solum dato tempore ad rectam BC perveniat, sed ad quodvis in ea punctum datum C.

SCHOLION 1

335. In hoc exemplo casus, quo $\alpha = 1$, bis occurrit; prima enim vice linea recta verticalis tantum satisfaciens est inventa, altera vice praeter

1) Editio princeps falso pro numero 333 iterat numerum 332. P. St.

hanc rectam alia inclinata, utroque tamen modo eadem aequatione generali sumus usi. Saepius autem iam huiusmodi casus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in se aequationes integrales, quae nihilominus per integrationes non eruuntur. Ut in casu $\alpha = 1$ haec habetur aequatio differentialis

$$\frac{(k^2+1)dx - k^2 du}{\sqrt{((k^2+1)x - k^2 u)}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}},$$

quae integrata dat $x = u$. Interim tamen perspicuum est hanc aequationem $k^2 u = (k^2+1)x$ in illa quoque contineri, etiamsi per integrationem non prodeat. Et hanc ob rem posterior aequatio integralis aeque satisfacit ac prior $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem

$$\frac{dt}{T} = V du,$$

in qua T est talis functio ipsius t, quae evanescat posito $t = 0$, et V functio quaecunque ipsius u, aeque comprehendere hanc integralem $t = 0$ ac hanc

$$\int \frac{dt}{T} = \int V du,$$

quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t = 0$, si t est simplex quantitas, negligi potest; at si t est quantitas composita ut in nostro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus § 300 in aequatione

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2 b - bx^2 - a^2\int P dx)}},$$

ubi observavimus aequationem $x = a$ in ea contineri, etiamsi integratio nequidem possit perfici. Nam posito $a - x = t$ erit $-dx = dt$ et

$$\sqrt{(a^2 b - bx^2 - a^2 \int P dx)}$$

erit functio ipsius t, quae fit $= 0$, si fit $t = 0$ seu $x = a$; namque accipi iubebatur, ut evanescat posito $x = a$. Posita ergo hac [illegible] tione $= T$ erit

$$ds = \frac{dt\sqrt{b}}{T},$$

ex qua aequatione ergo tuto concludi licet satisfacere aequationem $t=0$ seu $x=a$ ideoque problemati illi satisfacere circulum, ut ibi innuimus (§ 303). Magis universaliter vero in hac aequatione $Vdu=\frac{dt}{T}$, si T non evanescit posito $t=0$, comprehendetur ista aequatio $T=0$, ex qua erit $t=$ constanti quantitati ideoque $dt=0$. Unde intelligitur $T=0$ contineri in aequatione proposita $Vdu=\frac{dt}{T}\cdot$ Atque hinc, si t fuerit quantitas composita v. g. ex u et x, statim habetur aequatio integralis per integrationem vix eruenda.

SCHOLION 2

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem requirit, quando recta BC supra punctum A cum BA concurrit et quando est parallela. Considerabimus autem sequente problemate tantum casum, quo fit BC parallela verticali AB et in data distantia posita; ex quo simili modo casum rectae BC utcunque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37

PROBLEMA

337. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g; invenire curvas innumerabiles, super quibus corpus ex A* (Fig. 42) *motum a quiete incipiendo dato tempore ad rectam verticalem EC perveniat.*

SOLUTIO

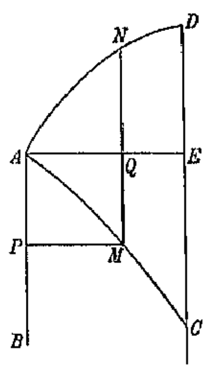


Fig. 42.

Sit AMC curva quaecunque quaesitarum et pro axe sumatur recta verticalis AB; dicatur $AP=x$, $PM=AQ=y$; erit celeritas in M debita altitudini gx et tempus per AM

$$=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}.$$

Sit porro AND curva, cuius quaevis applicata QN exprimat tempus per AM, et sit $QN=t$ functioni ipsius y; poterit ex curva AND data curva AMC inveniri. Quare si infinitae curvae AND concipiantur, quae omnes

in E communem habeant applicatam DE, omnes producent curvas AMC, super quibus corpus dato tempore per DE expresso ex A ad CE perveniet. Erit itaque

$$t = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$$

et posito $dt = pdy$ erit

$$gp^2xdy^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{atque} \quad dx = dy\sqrt{(gp^2x - 1)}.$$

Quae ita integrata, ut posito $x = 0$ fiat $y = 0$, dabit curvas AMC quaesitas. Sit R functio quaecunque ipsius y et $\int Rdy$ ita capiatur, ut evanescat posito $y = 0$. Tum fiat $\int Rdy = A$ posito $y = AE = a$ et existente $DE = \sqrt{b}$ sumatur

$$t = \frac{\sqrt{b}\int Rdy}{A};$$

erit

$$p = \frac{R\sqrt{b}}{A} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{dy}{A}\sqrt{(gbR^2x - A^2)}.$$

Quae aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curvas quaesito satisfacientes. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R = 1$; tum enim aequatio separabilis prodit. Erit vero $t = \frac{y\sqrt{b}}{a}$ ob $A = a$. Hanc ob rem fit

$$\frac{adx}{\sqrt{(gbx - a^2)}} = dy \quad \text{atque} \quad \frac{2a}{gb}\sqrt{(gbx - a^2)} = y.$$

Qui autem nullius est utilitatis ob valorem ipsius y imaginarium.

COROLLARIUM 2

339. Quia autem $\sqrt{(gbR^2x - A^2)}$ non potest esse quantitas imaginaria oportet sit $R^2x > \frac{A^2}{gb}$, etiamsi $x = 0$. Quare R neque quantitas cc potest neque functio ipsius y, quae evanescat facto $y = 0$. Hanc talis esse debet functio ipsius y, quae fiat $= \infty$, si ponatur tamen eiusmodi esse debet, ut $\int Rdy$ non fiat infinita esset $R = \frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

EXEMPLUM

340. Ponamus ergo esse $R=\frac{1}{\sqrt{y}}$; erit

$$\int R\,dy=2\sqrt{y}\quad\text{et}\quad A=2\sqrt{a}.$$

Hinc habebitur ista aequatio

$$2dx\sqrt{ay}=dy\sqrt{(gbx-4ay)}.$$

Quae aequatio quia est homogenea, ponatur $x=qy$; erit

$$2qdy\sqrt{a}+2ydq\sqrt{a}=dy\sqrt{(gbq-4a)}$$

seu

$$\frac{dq}{\sqrt{(gbq-4a)}-2q\sqrt{a}}=\frac{dy}{2y\sqrt{a}}.$$

Posito $\frac{gb}{4a}=n$ et $\sqrt{(nq-1)}=r$ erit

$$\frac{dy}{y}=\frac{-2rdr}{r^2-nr+1}.$$

Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n<2$.

Altero vero casu $n>2$ erit integrale[1])

$$ly=lC+\frac{n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}}l\left(2r-n+\sqrt{(n^2-4)}\right)+\frac{-n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}}l\left(2r-n-\sqrt{(n^2-4)}\right).$$

Quae ob

$$r=\frac{\sqrt{(nx-y)}}{\sqrt{y}}$$

abit in hanc

$$C\left(2\sqrt{(nx-y)}-(n-\sqrt{(n^2-4)})\sqrt{y}\right)^{\frac{n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}}}$$
$$=\left(2\sqrt{(nx-y)}-(n+\sqrt{(n^2-4)})\sqrt{y}\right)^{\frac{n+\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}}}.$$

Ubi pro C constantem quamcunque accipere licet, quia ipsa aequatio ita est comparata, ut posito $x=0$ fiat $y=0$. Per methodum autem supra traditam (§ 335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis

$$2q\sqrt{a}=\sqrt{(gbq-4a)}\quad\text{seu}\quad 2x\sqrt{a}=\sqrt{(gbxy-4ayy)},$$

1) Editio princeps: *Hoc vero casu erit integrale* Correxit P. St.

unde oritur

$$\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2b^2 - 64a^2)}}{8a},$$

quae dat duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imaginaria.

In casu, quo $n = 2$, erit

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2} \quad \text{seu} \quad ly = -2l(r-1) + \frac{2}{r-1},$$

unde fit

$$ly = -2l\left(\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}\right) + 2l\sqrt{y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}} + lC$$

seu

$$l\left(\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}\right) - lC = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}}.$$

Ubi etiam pro C quantitatem quamcunque accipere licet.

Si $n < 2$, tum constructio curvae partim a logarithmis, partim a quadratura circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{(n^2-4)}$ imaginarium logarithmi inventi imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae expressione analytica.

PROPOSITIO 38

PROBLEMA

341. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g dataque sit curva quaecunque BSC* (Fig. 43, p. 148); *invenire omnes curvas AMC, super quibus corpus descendendo ex A dato tempore ad curvam BSC perveniat.*

SOLUTIO

Sit curvarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punctum M ducatur curva MQ similis curvae BSC respectu puncti fixi A, et exprimat curvae AND applicata NQ tempus per arcum AM; exponet ergo applicata BD tempus per totam curvam AMC. Quo facto poterit vicissim ex data curva AND curva AMC inveniri. Quare si infinitae curvae AND concipiantur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae ge-

nerabunt infinitas curvas AMC, super quibus omnibus corpus ex A descendendo dato tempore per BD expresso ad curvam BSC perveniat. Sit nunc

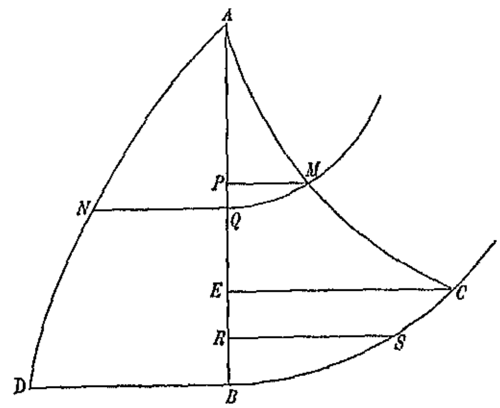


Fig. 43.

$AB=a$, $BD=\sqrt{b}$ et arcui QM abscindatur arcus similis BS ex curva data BSC; erit

$$AQ:AB=PM:RS=AP:AR=PQ:BR.$$

Ponatur porro $AP=x$, $PM=y$, $AQ=u$, $QN=t$, $AR=r$, $RS=s$; dabitur ob curvam BSC datam aequatio inter r et s atque ob curvam AND datam dabitur aequatio inter t et u. At ob similitudinem erit

$$u:a=y:s=x:r,$$

unde erit

$$y=\frac{us}{a} \quad \text{et} \quad x=\frac{ur}{a}.$$

Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx, ex qua tempus per AM erit

$$=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}},$$

quod aequale poni debet ipsi t; unde oritur ista aequatio

$$gx\,dt^2=dx^2+dy^2.$$

Quia autem t per u datur, sit $dt=p\,du$ et p sit functio ipsius u; atque ob

$$dx=\frac{udr+rdu}{a} \quad \text{et} \quad dy=\frac{uds+sdu}{a}$$

transibit illa aequatio in hanc

$$garup^2du^2 = (udr + rdu)^2 + (uds + sdu)^2.$$

At quia curva BSC datur, erit s functio ipsius r sitque $ds = qdr$ existente q functione ipsius r quacunque. His substitutis habebitur aequatio inter u et r ista

$$garup^2du^2 = (udr + rdu)^2 + (uqdr + sdu)^2.$$

Quae radice quadrata extracta dat

$$\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq \pm \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2q^2 + garup^2(1+qq))}}{u(1+qq)}.$$

Ex qua si aequatio inter r et u inveniatur, inde habebitur simul aequatio inter x et y pro curva quaesita.

Quod autem ad curvam AND attinet, sit P functio quaecunque ipsius u et $\int Pdu$ ita integratum, ut evanescat facto $u = 0$ et fiat $= A$ posito $u = a$; tum sumatur

$$t = \frac{\sqrt{b}\int Pdu}{A}$$

pro aequatione curvae AND. Erit ergo

$$p = \frac{P\sqrt{b}}{A},$$

ubi pro P functionem quamvis ipsius u ponere licet. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

342. Si u ponatur $= 0$, eo ipso quoque x et y evanescunt, nisi forte fiat r vel s infinitum. Illo igitur casu in integratione aequationis differentialis inventae constantem quamcunque addere licet, quia non opus est, ut r datum habeat valorem, si u fit $= 0$.

COROLLARIUM 2

343. Tum igitur ob constantem arbitrariam addendam ex unica curva AND data innumerabiles inveniuntur curvae AMC quaesito satisfacientes.

COROLLARIUM 3

344. Si curva BSC ita est comparata, ut nusquam neque r neque s fieri queat infinite magnum, semper unica curva AND infinitas dabit curvas

quaesitas AMC. Quae non solum hanc habebunt proprietatem, ut corpora super iis descendentia simul ad datam BSC perveniant, sed quoque simul ad quamvis datae similem curvam QM pertingent.

COROLLARIUM 4

345. Cum igitur in integratione aequationis inventae constantem quamcunque addere liceat, ea ita poterit assumi, ut curva AMC ad datum punctum C curvae datae BSC dirigatur. Hocque modo infinitae curvae AMC poterunt inveniri, quae omnes in dato puncto C conveniant.

SCHOLION 1

346. Posuimus curvas QM similes curvae BSC, ut curva ipsa in A erecta fiat infinite parva et omnia puncta curvae BSC in A conveniant et x et y evanescant posito $u=0$. Potuissemus autem eodem modo curvas QM vel cum BSC congruentes ponere vel discrepantes lege quacunque. Ut sit Q functio ipsius u quaecunque evanescens posito $u=0$ abeatque ea in B facto $u=a$, curva QM ita pendere poterit a curva BSC, ut sit

$$x=\frac{Qr}{B} \quad \text{et} \quad y=\frac{Qs}{B};$$

namque facto $u=a$ curva QM transibit in ipsam BSC et in A curva in punctum transibit, nisi curva BSC in infinitum progrediatur. At etiam hoc casu pro Q talis accipi poterit functio, ut, etiamsi fiat $r=\infty$, tamen Qr et Qs fiat $=0$, si $u=0$. Posito autem $dQ=Vdu$ habebitur aequatio generalis sequens

$$Qdr(1+qq)+Vdu(r+sq)=du\sqrt{\left(\frac{gbBP^2Qr(1+qq)}{A^2}-(Vs-Vrq)^2\right)}.$$

Quae aequatio latissime patet et ex unica curva AND infinito infinitas curvas AMC suggeret, quin etiam infinitas suppeditabit, quae per datum punctum C transeunt.

SCHOLION 2

347. Quantumvis generalis autem est haec aequatio, tamen curva QM est similis curvae BSC, quia est $x:y=r:s$. Quare adhuc generalior solutio

poterit exhiberi, in qua curvae QM utcunque dissimiles ponuntur curvae BSC, eiusmodi tamen, ut QM in BSC abeant facto $u=a$. Obtinebitur vero haec solutio, si R sumatur functio quaecunque ipsius u evanescens facto $u=0$ abeatque R in D posito $u=a$ sitque $dR=Wdu$. Sumatur enim

$$x=\frac{Qr}{B} \quad \text{et} \quad y=\frac{Rs}{D};$$

abibit x in r et y in s, si fiat $u=a$, atque evanescente u tam x quam y evanescent, quicquid sit r. Hinc autem sequens orietur aequatio generalissima

$$\begin{aligned} &dr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)+du(D^2QVr+B^2RWqs)\\ &=\pm du\sqrt{\left(\frac{gBD^2bP^2Qr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{A^2}-B^2D^2(RVqr-QWs)^2\right)}.\end{aligned}$$

In hac aequatione loco dr introduci potest ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$ et tum habebitur aequatio inter u et x. Notandum autem est, quia Q evanescit facto $u=0$, P talem esse debere functionem ipsius u, ut P^2Q posito $u=0$ vel fiat quantitas finita vel infinite magna; at tamen cavendum est, ne $\int Pdu$ debito modo sumtum fiat infinite magnum.

COROLLARIUM 5

348. Aequatio in solutione inventa fit separabilis, si fuerit $P=\frac{1}{\sqrt{u}}$; erit $A=2\sqrt{a}$ et $p=\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$. Habebitur enim

$$\frac{du}{u}=\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}};$$

dantur enim s et q per r.

COROLLARIUM 6

349. Simili modo aequatio scholii 1 separationem admittet, si fuerit

$$P^2Q=V^2 \quad \text{seu} \quad P=\frac{V}{\sqrt{Q}}.$$

Habebitur enim

$$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{\left(\frac{gBbr(1+qq)}{AA}-(s-rq)^2\right)}}=\frac{Vdu}{Q}=\frac{dQ}{Q},$$

in qua indeterminatae u et r sunt a se invicem separatae.

EXEMPLUM 1

350. Manente $P^2Q=V^2$ seu $\int Pdu=2\sqrt{Q}$ ob $Vdu=dQ$, erit facto $n=a$ $A=2\sqrt{B}$. Unde fit

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}}.$$

Habebit ergo $\int Pdu$ requisitam proprietatem, ut evanescat facto $u=0$; evanescit enim Q. Sit nunc curva BSC circulus super diametro AB descriptus; erit

$$s=\sqrt{(ar-r^2)} \quad \text{et} \quad q=\frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$$

atque

$$1+qq=\frac{a^2}{4(ar-r^2)};$$

his valoribus loco s et q substitutis prodibit ista aequatio

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{adr}{(-2\sqrt{(ar-rr)}\pm\sqrt{(gbr-4r^2)})\sqrt{(ar-r^2)}}.$$

Quae aequatio non solum indeterminatas a se invicem habet separatas, sed etiam generaliter per logarithmos integrari potest; potest enim in aequatione

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{adr}{-2ar+2r^2\pm r\sqrt{(gb-4r)(a-r)}}$$

membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec

$$lQ=\frac{4a}{4a-gb}\,l\,\frac{2\sqrt{(a-r)}\mp\sqrt{(gb-4r)}}{\sqrt{r}}\pm\frac{\sqrt{gab}}{4a-gb}\,l\,\frac{\sqrt{a(gb-4r)}+\sqrt{gb(a-r)}}{\sqrt{a(gb-4r)}-\sqrt{gb(a-r)}}+lC.$$

Notari hic convenit casum, quo

$$gb = 4a \quad \text{seu} \quad \sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}},$$

quo tempus per quamvis curvam AMC aequale ponitur tempori descensus per rectam verticalem AB; tum enim erit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar - r^2) \pm 2(ar - r^2)}.$$

Si igitur signum $+$ valeat, erit $dr = 0$ et $r = \text{const.} = c$, unde fit

$$s = \sqrt{(ac - c^2)}$$

et

$$x : y = \sqrt{c} : \sqrt{(a - c)} \quad \text{seu} \quad y\sqrt{c} = x\sqrt{(a - c)},$$

quae aequatio omnes dat chordas in hoc semicirculo ex A ductas, quemadmodum iam demonstravimus [§ 102] tempora per singulas chordas esse inter se aequalia. Valeat signum $-$, erit

$$\frac{4\,dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar - rr}$$

atque hinc

$$Q^{-4} = \frac{C^{-4}r}{a - r} \quad \text{seu} \quad \frac{r}{a - r} = \frac{C^4}{Q^4}.$$

Erit ergo

$$Q = C\sqrt{\sqrt{\frac{a - r}{r}}}$$

atque ob $s = \sqrt{(ar - r^2)}$ habebitur

$$x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\sqrt{\frac{a - r}{r}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{C}{B}\sqrt{\sqrt{r(a - r)^3}};$$

eliminata ergo r prodibit ista aequatio $\left(\text{posito } \frac{C}{B} = m\right)$

$$y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}.$$

Hae ergo curvae hanc habent proprietatem, ut arcus earum a semicirculo abscissi absolvantur descendendo eodem tempore, eo scilicet tempore, quo singulae semicirculi chordae percurruntur.

COROLLARIUM 7

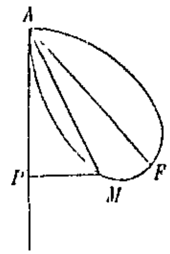


Fig. 44.

351. Huius autem curvae, cuius aequatio est

$$y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy},$$

figura est $AMFA$ (Fig. 44); habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum semirectum constituentem et in A nodum. At vero omnes hae curvae sunt inter se similes et omnes ad omnes circulos accommodari possunt.

COROLLARIUM 8

352. Si ergo in hac curva sumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus transiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli seu quo chordam AM. Quare haec curva hanc habet proprietatem, ut quivis arcus AM a corpore ex A descendente absolvatur eodem tempore, quo subtensa AM.

COROLLARIUM 9

353. Hoc ergo casu, quo $P^2Q = V^2$ [§ 349], perinde est, sive sit $Q = u$ sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y, uti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur.

EXEMPLUM 2

354. Manente $P^2Q = V^2$, ut sit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}},$$

sit curva BSC circulus centro A radio $AB = a$ descriptus; erit

$$s = \sqrt{(a^2 - r^2)}$$

et

$$q = \frac{-r}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \quad \text{atque} \quad 1 + qq = \frac{a^2}{a^2-r^2}.$$

Quibus substitutis prodibit sequens aequatio

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\pm\, a\,dr}{\sqrt{\left(\frac{gbr}{4} - a^2\right)(a^2 - r^2)}},$$

ubi gb maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a. Hinc statim ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo

$$\frac{gbr}{4} = a^2 \quad \text{seu} \quad r = \frac{4a^2}{gb},$$

quo casu erit

$$s = \frac{a\sqrt{(g^2b^2 - 16a^2)}}{gb}.$$

Unde erit

$$x : y = 4a : \sqrt{(g^2b^2 - 16a^2)} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(g^2b^2 - 16a^2)}}{4a},$$

quae est tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad peripheriam pervenit, cum verticali AB. Curvae praeterea algebraicae non dantur, quia formula differentialis non effici potest rationalis.

EXEMPLUM 3

355. Sumta aequatione generalissima ex § 347 ponatur linea BSC recta horizontalis; fiet $r = a$ et $dr = 0$. Hanc ob rem loco dr introducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, ubi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q evanescunt, proveniet ista aequatio

$$ABRds + ABWsdu = \pm\, Ddu\sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}.$$

Quae aequatio ob $Wdu = dR$ et P, Q et V data per u integrationem admittit. Erit nempe

$$\frac{ABRs}{D} = C \pm \int du\sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}.$$

Ex qua aequatione ergo invenitur s. Deinde, cum sit $y = \frac{Rs}{D}$, at y evanescere debeat facto $u = 0$, debebit esse $C = 0$, si quidem integrale

$$\int du\sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$$

ita sumatur, ut evanescat posito $u = 0$. Tum ergo erit

$$x = \frac{Qa}{B} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pm 1}{AB}\int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}.$$

Quae est aequatio generalis pro omnibus curvis, super quibus corpus ex A ad horizontalem datam descendit.

EXEMPLUM 4

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (§ 347) et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantiam f ab ea posita; erit $s = f$ et $q = 0$. Quare habebitur ista aequatio

$$ADQdr + ADrdQ = \pm du \sqrt{(gBD^2bP^2Qr - A^2B^2f^2W^2)}.$$

Cum autem sit $Qr = Bx$, hoc substituto prodibit

$$ADdx = \pm du \sqrt{(gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)},$$

unde invento x erit

$$y = \frac{fR}{D}.$$

At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a se invicem separatae, non multum ex ea derivare licet.

SCHOLION 3

357. Ex generali huius problematis solutione, quando unica curva AND infinitas dat curvas AMC, colligere licet solutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curvae, super quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum pervenit. Quaelibet enim curva AND unam dabit curvam per datum punctum curvae BSC transeuntem hocque modo innumerabiles huiusmodi curvae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre convenit. Modus autem, quo utemur, ita est comparatus, ut unam curvam iam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curva, quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur, ut ex § 350, ubi curva per quodvis punctum semicirculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39

PROBLEMA

358. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g dataque sit curva AMC* (Fig. 45), *super qua corpus ex A ad punctum datum C pervenit; invenire omnes curvas ANC, super quibus corpus eodem tempore ad punctum C ex A descendit.*

SOLUTIO

Sumta verticali AB pro axe omnium curvarum sit curvae datae AMC abscissa $AP = t$, applicata $PM = u$ sitque curva ANC una quaesitarum; capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore absolvatur quo arcus AM; iungantur puncta M et N recta MN et construatur curva ALB talis, ut applicata PL aequalis sit rectae MN. Haec ergo curva ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A punctum N quoque in A incidet et posito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur.

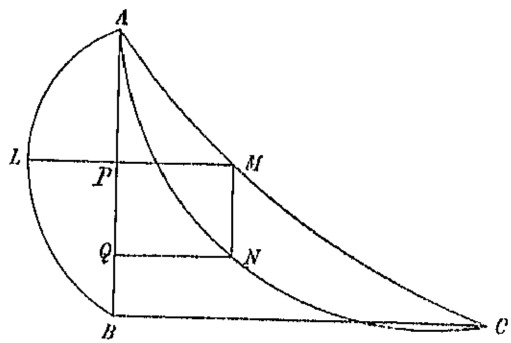


Fig. 45

Intelligitur autem ex curva ALB inveniri posse curvam ANC; quare si infinitae huiusmodi curvae ALB concipiantur in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curvam ANC hocque modo innumerabiles prodibunt curvae ANC quaesito satisfacientes. Sit nunc $PL = r$; erit r functio quaedam ipsius $AP = t$; curvae autem ANC ponatur abscissa $AQ = x$ et $QN = y$. His positis erit

$$MN = \sqrt{((x-t)^2 + (u-y)^2)} = r$$

ideoque

$$y = u \pm \sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}.$$

Porro, quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit

$$\int \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{\sqrt{gt}} = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$$

seu

$$xdt^2 + xdu^2 = tdx^2 + tdy^2.$$

Est autem

$$dy = du \pm \frac{(rdr - xdx + tdx + xdt - tdt)}{\sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}}.$$

Sit $du = pdt$ et $dr = qdt$; erunt r, p et q functiones ipsius t; ponatur porro brevitatis gratia $x - t = z$ seu $x = t + z$; erit

$$dy = pdt \pm \frac{qrdt - zdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$$

et

$$dy^2 + dx^2$$

$$= p^2dt^2 + dt^2 + 2dtdz + dz^2 \pm \frac{2pqrdt^2 - 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} + \frac{q^2r^2dt^2 - 2qrzdtdz + z^2dz^2}{r^2 - z^2}.$$

Hinc obtinetur ista aequatio

$$\frac{tr^2dz^2}{r^2 - z^2} = \frac{2tqrzdtdz - tq^2r^2dt^2}{r^2 - z^2} \pm \frac{2pztdtdz - 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - 2tdtdz + zdt^2 + zp^2dt^2,$$

ex qua z et t determinetur; habebitur aequatio inter x et y. Quo autem appareat, cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, ut r evanescat tam posito $t = 0$ quam $t = AB = a$, sit P functio quaecunque ipsius t evanescens posito $t = 0$ et Q sit etiam talis functio evanescens posito $t = 0$; abeat vero Q in A, si fiat $t = a$; poterit ergo poni $r = P(A - Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curvis quaesitis. Q. E. I.

SCHOLION 1

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inventa ad absurdum deducere debet, ut si curva data AMC fuerit linea brevissimi descensus, quo casu non dari potest alia curva, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conveniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare eaque problemata resolvere, in quibus inter omnes curvas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absolvatur, atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit invenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita.

Etiamsi enim difficillimum sit omnes lineas idem descensus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet potest inveniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus isoperimetricorum, quam ut passim expositam hic non explicabimus.

SCHOLION 2

360. Huius autem problematis solutio per § 348 sequenti modo habetur. Erat ibi

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}}.$$

Sit punctum C (Fig. 43, p. 148), ad quod omnes curvae convenire debent, ponaturque $AE = f$ et $EC = h$; si ergo fit $r = f$, fieri debet $s = h$. Ad hoc sit S functio quaecunque ipsius r, quae abeat in F posito $r = f$, quo facto ponatur

$$s = \frac{Sh}{F}.$$

Substituatur hic valor in superiore aequatione eaque ita integretur, ut posito $u = a$ fiat $r = f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curvae quaesitae AMC, nempe $AP = x$ et $PM = y$, ex eo, quod est

$$x = \frac{ur}{a} \quad \text{et} \quad y = \frac{us}{a}.$$

Atque arbitrarius valor ipsius S dabit infinitas curvas AMC puncta A et C iungentes et super quibus corpus descendens tempore dato $= \sqrt{b}$ perveniet ex A ad C. Sit autem $dS = Tdr$; erit $q = \frac{hT}{F}$ atque

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+h^2T^2)}{-F^2r-h^2ST \pm \sqrt{\left(\frac{gF^2br}{4}(F^2+h^2T^2)-(FhS-FhTr)^2\right)}}$$

seu

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+h^2T^2)}{-F^2r-h^2ST \pm F\sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(F^2+h^2T^2)-(hS-hTr)^2\right)}}.$$

Quae aequatio ita integretur, ut posito $u = a$ fiat $r = f$; quo facto ponatur

$$x = \frac{ur}{a} \quad \text{et} \quad y = \frac{hSu}{Fa}$$

atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis curvis AMC quaesito satisfacientibus.

PROPOSITIO 40

PROBLEMA

361. *Invenire legem generalem, secundum quam curva disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perveniat ad quodvis curvae punctum.*

SOLUTIO

Sit AMC (Fig. 46) curva huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breviore perveniat quam super quavis alia curva per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque [punctis] M et μ curva inter ea intercepta ita debet esse comparata, ut corpus in motu suo per AMC arcum inter M et μ interceptum breviore tempore absolvat quam quemvis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima iuncta duobus elementis Mm, $m\mu$, et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequale tempori per elementa proxima Mn, $n\mu$. Ducantur ad axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$ sumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter se aequalibus seu quoque $MG = mH$ et pm, si opus est, ad n producta erit mn infinite parvum respectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo esse

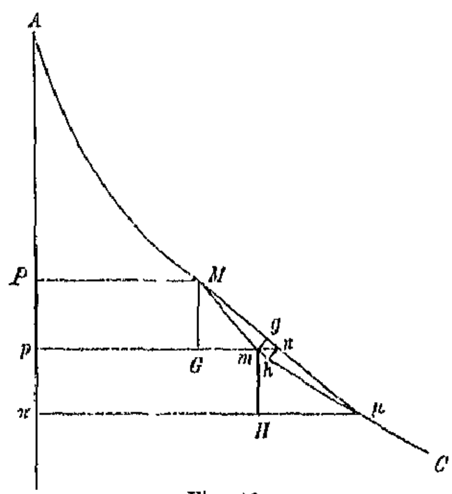


Fig. 46

$$t.Mm + t.m\mu = t.Mn + t.n\mu.\text{[1]}$$

Sit celeritas, quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm quam Mn percurret. Celeritas autem, quam in m habebit, debita sit altitudini $v + du$ et celeritas, quam in n habebit, debita sit altitudini $v + du + ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero

1) IAC. HERMANN, *Phoronomia*, Amstelodami 1716, p. 55: „Ad designandum tempus, quo unusquisque motus absolvitur, utemur nota characteristica temporis t spatio percurso aut conficiendo praefigenda". P. St.

elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}};$$

est vero

$$\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} - \frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}},$$

unde ductis centris M et μ arculis mg et nh erit

$$\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mh}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu \cdot ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}.$$

Porro est

$$\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}.$$

Quibus, neglectis negligendis, substitutis oritur

$$2v(mh - ng) = mh \cdot du - n\mu \cdot ddw = mh \cdot du - Mm \cdot ddw.$$

Est vero propter triangula similia nmg, mMG et nmh, μmH, ut sequitur,

$$ng : mn = mG : mM \quad \text{seu} \quad ng = \frac{mG \cdot mn}{Mm}$$

et

$$mh : mn = \mu H : m\mu \quad \text{seu} \quad mh = \frac{\mu H \cdot mn}{m\mu}.$$

Quamobrem erit

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}\right) = \frac{mG \cdot du}{Mm} - \frac{Mm \cdot ddw}{mn} = 2v \text{ diff. } \frac{mG}{Mm}.$$

Quae aequatio est homogenea et determinat naturam curvae AMC *brachystochronae* vocatae, super qua corpus tempore brevissimo ex A ad C pervenit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

362. Si ergo dicatur

$$MG = mH = dx, \quad mG = dy \quad \text{et} \quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds,$$

erit

$$H\mu = dy + ddy \quad \text{et} \quad m\mu = ds + dds.$$

His substitutis habebitur

$$2vd.\frac{dy}{ds}=\frac{dydu}{ds}-\frac{dsddw}{mn}.$$

In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v, du et ddw, habebitur aequatio pro curva brachystochrona. At semper ddw ita involvet mn, ut mn ex calculo excedat.

COROLLARIUM 2

363. Sit radius osculi curvae $Mm\mu=r$; isque in plagam aversam ab axe AP directus erit

$$r=\frac{ds^3}{dxddy};$$

at est

$$d.\frac{dy}{ds}=\frac{dsddy-dydds}{ds^2}=\frac{dx^2ddy}{ds^3}.$$

Quare erit

$$d.\frac{dy}{ds}=\frac{dx}{r};$$

hinc prodibit ista aequatio

$$\frac{2vdx}{r}=\frac{dydu}{ds}-\frac{dsddw}{mn}.$$

Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curva in M secundum normalem ad curvam premitur.

COROLLARIUM 3

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat

$$dv=Pdx+Qdy+Rds,$$

erit

$$du=Pdx+Qdy+Rds \quad \text{et} \quad ddw=Q\cdot mn+R\cdot ng,$$

quia puncto m in n translato crescit dy particula mn et ds particula ng. Quia autem est $ng=\frac{dy\cdot mn}{ds}$, erit

$$\frac{ddw}{mn}=-Q-\frac{Rdy}{ds},$$

quibus substitutis habebitur ista aequatio

$$\frac{2v}{r}=\frac{Pdy-Qdx}{ds}.$$

SCHOLION 1

365. Ex solutione intelligitur formulam inventam latissime patere atque ad potentias sollicitantes quascunque extendi, etiam resistentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae sollicitantes, determinari potest tam du quam ddw, qui valores substituti dabunt aequationem pro brachystochrona quaesita. Attamen haec tantum locum habent, si potentiarum directiones sint in eodem plano; curva enim inventa est in eodem plano sita. Nihilo tamen minus, si potentiae non fuerint in eodem plano, curva brachystochrona in dato plano ope formulae huius poterit inveniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curva brachystochrona, quaecunque fuerint potentiae sollicitantes. Alia vero quaestio est, si quaeratur linea brachystochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta iungentes, etiam non in uno plano sitas. Quoties vero potentiarum sollicitantium directiones in eodem plano sunt positae, dubium non est lineam brachystochronam in eodem positam esse plano. Nam si curvae non essent in eodem plano, potentiae oblique agerent et propterea corpus non tantum, quantum fieri potest, accelerarent. Ex hac igitur solutione tam linea absolute brachystochrona, si potentiarum sollicitantium directiones sunt in eodem plano, invenitur quam linea, quae in dato plano est brachystochrona, quaecunque fuerint potentiae sollicitantes.

SCHOLION 2

366. Quaestionem hanc de linea brachystochrona seu celerrimi descensus primus produxit Cel. IOH. BERNOULLI[1]) atque plures eius solutiones extant tam in Act. Lips. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Paris. et alibi, ubi hoc problema tam in hypothesi potentiae sollicitantis deorsum directae quam pro viribus centripetis solutum dederunt[2]). Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemisit, ut ad

---

1) IOH. BERNOULLI, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus solutioque problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi de invenienda linea brachystochrona*, Acta erud. 1697, p. 206; *Opera omnia*, Tom. I, p. 187; *Lettre de Mr. JEAN BERNOULLI a Mr. BASNAGE, sur le problème des isopérimètres*, Histoire des Ouvrages des Sçavans, Paris 1697, p. 452; *Opera omnia*, Tom. I, p. 194; *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1718, p. 100; *Opera omnia*, Tom. II, p. 225. P. St.

2) Vide notam 2 p. 167. P. St.

potentias quascunque et resistentiam etiam extendi posset. Sumserunt enim omnes $ddw = 0$, quod semper perperam fit, nisi directio potentiae sit MG vel mH. Et hanc ob rem Cel. HERMANNUS cespitavit, dum tali propositione ad brachystochronas in medio resistente inveniendas est usus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727[1]); quasque correctas dedi in iisdem Comm. A. 1734[2]) ex hoc ipso problemate.

PROPOSITIO 41

PROBLEMA

367. *Si corpus perpetuo deorsum trahatur vi quacunque, invenire lineam brachystochronam AMC* (Fig. 46, p. 160), *super qua corpus citissime ex A ad C descendit.*

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$ sit vis, quae corpus in M deorsum urget, $= P$; erit $v = \int Pdx$ hoc integrali ita accepto, ut evanescat posito $x = 0$, si quidem corpus motum in A ex quiete inchoare ponitur, atque $dv = Pdx$. Erit ergo

$$du = Pdx = dv \quad \text{et} \quad ddw = 0,$$

quia du invariatum manet eunte m in n. Quocirca habebitur ista aequatio

$$2vd.\frac{dy}{ds} = \frac{dy\,dv}{ds},$$

cuius integralis est

$$l\frac{v}{a} = 2l\frac{dy}{ds} \quad \text{seu} \quad vds^2 = ady^2,$$

hincque

$$dx^2\int Pdx = ady^2 - dy^2\int Pdx.$$

---

1) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpora indesinenter agentibus,* Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139. P. St.

2) L. EULERI Commentatio 42 (indicis ENESTROEMIANI): *De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 135; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 25. Vide etiam Commentationem 56 (indicis ENESTROEMIANI): *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis,* Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, p. 172; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 25. P. St.

Quamobrem pro linea brachystochrona quaesita habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{\int P dx}}{\sqrt{(a - \int P dx)}},$$

in qua indeterminatae x et y sunt a se invicem separatae. Curvae autem longitudo habetur ex hac aequatione

$$ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a - \int P dx)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

368. In A igitur, ubi celeritas corporis evanescit seu fit $\int P dx = 0$, erit $dy = 0$, seu tangens curvae in A erit verticalis incidens in AP. At ubi fit $\int P dx = a$, ibi tangens curvae erit horizontalis.

COROLLARIUM 2

369. Quia $ddw = 0$ et $du = P dx$, erit

$$\frac{2v}{r} = \frac{P dy}{ds}$$

(§ 363). Est vero $\frac{P dy}{ds}$ vis normalis, qua curva in M secundum normalem versus axem AP ductam premitur. Consequenter vis normalis est aequalis vi contrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachystochrona hanc habet proprietatem, ut tota pressio, qua curva premitur, sit duplo maior quam vis normalis sola. In sequentibus vero demonstrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachystochronis sive in vacuo sive in medio resistente locum habere.

COROLLARIUM 3

370. Propter arbitrariam a dantur infinitae curvae brachystochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici potest, ut curva ex A per datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, super qua tempus est minimum.

COROLLARIUM 4

371. Quia curva AMC (Fig. 47) alicubi habet tangentem horizontalem, sit ea BC et in C sumatur alius axis verticalis CQ. Sit $CQ = X$, $QM = Y$ et $CM = S$; erit $dX = -dx$, $dY = -dy$ et $dS = -ds$ atque

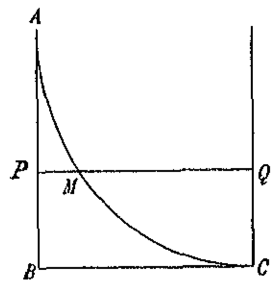


Fig. 47.

$$\int P dx = a - \int P dX$$

integrali $\int P dX$ ita accepto, ut evanescat posito $X = 0$. Ad hunc ergo axem CQ si curva referatur, habebitur ista aequatio

$$dY = \frac{dX\sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}} \quad \text{seu} \quad dS = \frac{dX\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}.$$

COROLLARIUM 5

372. Hae ergo omnes curvae ad utramque partem axis CQ duos arcus habent similes et aequales. Simili modo ad utramque partem axis AB curva aequaliter est disposita. Quamobrem huiusmodi curvae infinitas diametros habebunt inter se parallelas et ad distantiam BC positas, nisi forte potentia sollicitans ita accipiatur, ut supra A sit negativa, quo casu curva CMA sursum tendere poterit et partem concavam deorsum convertere.

EXEMPLUM 1

373. Sit potentia sollicitans uniformis seu $P = g$; erit $\int P dx = gx$; unde loco a posito gb pro brachystochrona in hac potentiae sollicitantis hypothesi habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b - x)}} \quad \text{seu} \quad ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b - x)}}.$$

At si aequatio ad axem CQ referatur, erit

$$dY = \frac{dX\sqrt{(b - X)}}{\sqrt{X}} \quad \text{et} \quad dS = \frac{dX\sqrt{b}}{\sqrt{X}},$$

cuius integralis est $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet curvam esse cycloidem

super basi horizontali a circulo diametri b descriptam et deorsum conversam, quemadmodum hoc a Cel. IOH. BERNOULLI[1]) aliisque eximiis geometris[2]) iam pridem est inventum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, linea, super qua corpus ex A citissime ad M descendit, invenitur, si describatur cyclois cuspidem in A et basem horizontalem habens atque per punctum M transiens; id quod ex eo, quod omnes cycloides sunt curvae similes, ex unica descripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad M pertingit quodque est minimum, erit

$$=\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{g(bx-x^2)}}$$

et curvae AM longitudo erit

$$=\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}=2b-2\sqrt{b(b-x)}.$$

Cum autem sit

$$PM=y=\int\frac{xdx}{\sqrt{(bx-xx)}},$$

erit tempus per AM

$$=\frac{2y+2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}}$$

$=$ arcui in circulo diametri b, cuius sinus versus est $=x$, ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

---

1) Vide notam 1 p. 163. P. St.

2) G. G. L[EIBNIZ], *Communicatio suae pariter duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Io. BERNOULLIO, deinde a Dn. Marchione HOSPITALIO communicatarum solutionum problematis curvae celerrimi descensus a Dn. Io. BERNOULLIO geometris publice propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem postea propositi*, Acta erud. 1697, p. 201; *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. GERHARDT, 2. Abteilung, Band 1, Halle 1858, p. 301.

IAC. B[ERNOULLI], *Solutio problematum fraternorum ... una cum propositione aliorum*, Acta erud. 1697, p. 211; *Opera*, Genevae 1744, p. 768.

G. DE L'HOSPITAL, *Solutio problematis de linea celerrimi descensus*, Acta erud. 1697, p. 217.

[I. NEWTON], *Epistola missa ad praenobilem virum D. CAROLUM MONTAGUE, in qua solvuntur duo problemata mathematicis a IOHANNE BERNOULLIO math. cel. proposita*, Philosophical transactions (London) 1697, p. 384; Acta erud. 1697, p. 223; *Opuscula*, Tom. I, Lausannae et Genevae 1744, p. 280.

R. SAULT, *Analytical investigation of the curve of quickest descent*, Philosophical transactions (London) 1698, p. 425.

I. CRAIG, *The curve of the quickest descent*, Philosophical transactions (London) 1701, p. 746. P. St.

EXEMPLUM 2

374. Si potentia sollicitans P fuerit ut potestas quaecunque abscissae CQ, nempe $P=\frac{X^n}{f^n}$, erit

$$\int PdX=\frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Consequenter curva brachystochrona AMC exprimetur hac aequatione

$$dY=\frac{dX\sqrt{((n+1)af^n-X^{n+1})}}{X^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{seu} \quad dS=\frac{dX\sqrt{(n+1)af^n}}{X^{\frac{n+1}{2}}},$$

ita ut sit

$$S=\frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n}\sqrt{(n+1)af^n}.$$

Quare si fuerit vel $n=1$ vel $n>1$, curva CM erit infinite magna seu ipsa recta BC. Cuspis autem curvae A seu locus, in quo motus incipit, habetur sumendo

$$CQ=BA=\sqrt[n+1]{(n+1)af^n}.$$

Curvae prodibunt algebraicae, si fuerit

$$n=\frac{1-2m}{1+2m}$$

denotante m numerum integrum affirmativum quemcunque. His igitur casibus erit n numerus negativus unitate minor, ita tamen, ut $n+1$ sit numerus affirmativus. Sit $m=1$, erit $n=-\frac{1}{3}$. Quare fiet

$$dY=\frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}\sqrt{\left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}}-X^{\frac{2}{3}}\right)},$$

cuius integralis est

$$Y=\frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3f}}-\left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}}-X^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis sexti. Simili modo aliae curvae algebraicae invenientur, quae in certis hypothesibus sunt brachystochronae.

SCHOLION 1

375. Ex data problematis solutione sequitur simul solutio problematis inversi, quo quaeritur potentia sollicitans deorsum directa talis, ut data curva sit brachystochrona. Debet autem haec curva in puncto infimo C habere tangentem horizontalem et alicubi in A, ubi est motus initium, tangentem verticalem. Ut si fuerit aequatio pro curva data haec $dY = RdX$, erit

$$R^2\int PdX = a - \int PdX \quad \text{atque} \quad \int PdX = \frac{a}{R^2+1}.$$

Unde invenitur

$$P = \frac{-2aRdR}{(R^2+1)^2dX} = \frac{-2adXdYddY}{dS^4}.$$

Si ergo radius osculi in M ponatur r, propter $r = \frac{dS^3}{-dXddY}$ habebitur

$$P = \frac{2adY}{rdS}.$$

Quare problema hac unica solvetur analogia: ut radius osculi curvae in M ad lineam datam, ita sinus anguli, quem tangens curvae in M cum verticali facit, ad potentiam sollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritati, quam corpus in M habet, est

$$a - \int PdX = \frac{aR^2}{R^2+1} = \frac{adY^2}{dS^2},$$

ex quo sequitur celeritatem corporis esse illi ipsi sinui anguli, quem tangens curvae cum verticali constituit, proportionalem. Ut si sit curva CMA circulus radio c descriptus, erit $r = c$ et

$$dY = \frac{cdX - XdX}{\sqrt{(2cX - XX)}} \quad \text{atque} \quad dS = \frac{cdX}{\sqrt{(2cX - XX)}},$$

ex quibus fit

$$P = \frac{2a(c-X)}{c^2} = \frac{2a\cdot AP}{cc}.$$

Vis ergo corpus deorsum trahens proportionalis esse debet abscissae AP, cui etiam celeritas est proportionalis.

SCHOLION 2

376. Inventa linea brachystochrona pro hypothesi potentiae sollicitantis deorsum tendentis ordo requireret, ut lineas brachystochronas in hypothesi virium centripetarum determinaremus. At propositio fundamentalis (§ 361) ita est comparata, ut elementa curvae Mm et $m\mu$ (Fig. 46, p. 160) ad axem AP et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad casum virium centripetarum non commode quadrat. Videntur quidem elementa MG et mH ut convergentia ad centrum virium considerari posse; sed hic ipso error, qui ex hoc oritur, quod elementa MG et mH non essent parallela, ut propositio fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perspicuum hoc reddi potest determinando radio osculi, qui, si MG et mH fuerint inter se parallela, est

$$= MG : d.\frac{mG}{Mm};$$

quae autem expressio non locum habet, si MG et mH ad centrum virium convergunt. Quare antequam ad brachystochronas in hypothesi virium centripetarum accedamus, ex propositione fundamentali generalem derivabimus proprietatem cuicunque potentiarum sollicitantium hypothesi accommodatam. Ex quibus perspicietur Cel. HERMANNUM in *Phoronomia*[1]) aliosque, qui brachystochronas pro viribus centripetis dederunt[2]), esse deceptos, dum usi sunt principio cum veritate non consentaneo, ut mox indicabitur.

PROPOSITIO 42

THEOREMA

377. *Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea linea erit brachystochrona, quam corpus super ea motum premit vi duplo maiore, quam est vel sola vis centrifuga vel sola vis normalis.*

---

1) IAC. HERMANN, *Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum*, Amstelodami 1716, p. 81. P. St.

2) IOH. MACHIN, *Inventio curvae, quam corpus descendens brevissimo tempore describeret, urgente vi centripeta ad datum punctum tendente, quae crescat vel decrescat iuxta quamvis potentiam distantiae a centro; dato nempe imo curvae puncto et altitudine in principio casus*, Philosophical transactions (London) 1718, p. 860. P. St.

DEMONSTRATIO

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes in binas resolvi possunt, quarum altera trahat secundum MG (Fig. 46, p. 160), altera secundum MP. Sit illa secundum MG trahens $= P$ et, quae secundum MP trahit, $= Q$ et dicantur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ itemque altitudo celeritati in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis

$$= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$$

et vis normalis

$$= \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

Hanc ob rem erit

$$dv = Pdx - Qdy.$$

Cum hac expressione comparetur, quod supra (§ 364) est allatum, ubi posuimus

$$dv = Pdx + Qdy + Rds;$$

erit Q negativum et $R = 0$. Sequitur ergo exinde fore

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

At est $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, qua curva in M premitur, et $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$ est vis normalis. Quare cum vis centrifuga sit aequalis vi normali, tota pressio, quam curva sustinet, duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola vis normalis. Q. E. D.

SCHOLION 1

378. In sequente capite demonstrabimus hanc eandem propositionem locum etiam habere in medio quocunque resistente; id quod quidem eadem opera hic demonstrare potuissemus; sed quia resistentiae sequens caput est destinatum, eo potius hoc theorema transferre visum est.

COROLLARIUM 1

379. Ex hac igitur propositione facile erit in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi brachystochronas determinare. Hocque ipsum iam ex aliqua parte supra praestitimus, ubi curvas determinavimus, in quibus pressio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

COROLLARIUM 2

380. Cum sit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Qdy$ his integralibus ita accipiendis, ut evanescant factis x et $y = 0$, si quidem motus in A ex quiete incipere debet.

COROLLARIUM 3

381. Si ergo hic pro v inventus valor substituatur, habebitur aequatio pro curva brachystochrona haec

$$\frac{2\int Pdx - 2\int Qdy}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

Est vero $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ (§ 363) sumto dx pro constante, quia in partem oppositam axi AP cadere r ponitur; unde habetur haec aequatio

$$\frac{2dxddy}{ds^2}\left(\int Pdx - \int Qdy\right) = Pdy + Qdx.$$

COROLLARIUM 4

382. Quia haec aequatio est differentialis secundi gradus atque ideo duplicem integrationem requirit, altera integratione constans quaevis poterit adiici, altera effici debet, ut facto $x = 0$ fiat quoque $y = 0$. Infinitae ergo prodeunt curvae brachystochronae pro eadem potentiarum sollicitantium hypothesi. Atque constante arbitraria effici poterit, ut curva per datum punctum transeat.

COROLLARIUM 5

383. Tempus, quo corpus ex A ad M pervenit, est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(\int Pdx - \int Qdy)}} = \int \sqrt{\frac{2dxddy}{Pdy + Qdx}},$$

quae quidem expressio prius ex aequatione curvae est investiganda; minimum vero hoc tempus esse debet inter omnia alia tempora motuum per curvas omnes puncta A et M iungentes.

SCHOLION 2

384. Quemadmodum porro in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi eae curvae libere describuntur, in quibus vis centrifuga aequalis

est et contraria vi normali, ita eae curvae erunt brachystochronae, in quibus vis normalis quoque aequalis est vi centrifugae, sed in eandem plagam tendens. Atque quemadmodum illa proprietas communis est omnium curvarum libere descriptarum etiam in medio resistente, ita haec quoque proprietas ad omnes lineas brachystochronas in medio resistente extenditur.

PROPOSITIO 43

PROBLEMA

385. *Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium C* (Fig. 48), *invenire lineam brachystochronam AM, super qua corpus ex A citissime ad M pertinget.*

SOLUTIO

A puncto A, in quo motus initium ponitur, ad centrum virium C ducatur recta AC, item MC et in tangentem MT ex C perpendiculum CT. Ponantur $AC = a$, $CM = y$, $CT = p$, vis centripeta in $M = P$ et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit $dv = -Pdy$ et $v = \int Pdy$ hoc integrali ita accepto, ut evanescat posito $y = a$. Vis normalis autem erit $= \frac{Pp}{y}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga et in eandem plagam tendens; tum enim proveniet curva brachystochrona, ut propositione praecedente demonstravimus. Curva igitur debebit esse convexa versus centrum C et radius osculi in partem aversam a centro C cadet. Quare, cum haec expressio $\frac{ydy}{dp}$ exhibeat radium osculi, quatenus versus centrum cadit, erit vera radii osculi expressio in nostro casu $\frac{-ydy}{dp}$. Vis igitur centrifuga erit

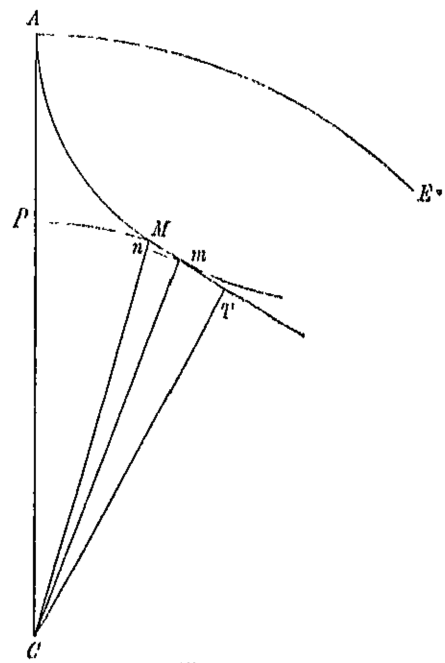


Fig. 48

$$= \frac{-2vdp}{ydy} = \frac{2dp\int Pdy}{ydy},$$

cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur haec aequatio

$$\frac{2dp}{p}=\frac{Pdy}{\int Pdy},$$

cuius integralis est

$$\frac{pp}{b}=-\int Pdy \quad \text{seu} \quad p=\sqrt{-b\int Pdy};$$

quae est aequatio pro curva quaesita inter y et p. At si centro C ducatur arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit

$$nm=\frac{yds}{a} \quad \text{et} \quad pp=\frac{y^4ds^2}{a^2dy^2+y^2ds^2}.$$

Hinc fiet

$$ds=\frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$$

atque valore ipsius p ex superiore aequatione substituto habebitur

$$ds=\frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2+b\int Pdy)}},$$

quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a descriptum, qui metitur angulum ACM, ex qua fluit constructio curvae quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

386. Quia altitudo celeritati debita est

$$v=-\int Pdy=\frac{pp}{b},$$

celeritas corporis in quovis loco erit ut perpendiculum ex C in tangentem demissum, simili modo, quo in motu libero celeritas est huic perpendiculo reciproce proportionalis.

COROLLARIUM 2

387. Sit radius osculi in $M=r$; erit $\frac{2v}{r}=\frac{Pp}{y}$ ex conditione problematis. Hinc ergo habebitur

$$r=\frac{2yv}{Pp}=\frac{2py}{bP}.$$

Quia autem in initio curvae in A est $p=0$ seu AC tangens curvae, erit radius osculi quoque in A $=0$, nisi forte simul vis centripeta P in A evanescat.

COROLLARIUM 3

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco, ubi $dp=0$; ibi autem ex aequatione pro curva fit $dy=0$. Quare in eo loco corpus celerrime movetur, ubi recta CM in curvam est normalis. Curva ergo ultra hoc punctum a centro C recedit.

SCHOLION 1

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis non est proportionalis sinui anguli, quem tangens curvae cum directione vis centripetae constituit; huius enim anguli TMC sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas vero ipsi p inventa est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, si centrum virium infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt inter se parallelae, ut ex prop. 41 intelligitur, ubi celeritas erat ut $\frac{dy}{ds}$, i. e. ut sinus anguli, quem elementum curvae cum directione potentiae sollicitantis constituit. Hanc autem proprietatem Cel. HERMANNUS in Comm. Acad. Petrop. A. 1727[1]) omnibus brachystochronis tam in vacuo quam in medio resistente communem esse est arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eae lineae, quas in medio resistente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in vacuo pro viribus centripetis invenit. Hoc autem casu invenit hanc aequationem $\frac{-\int Pdy}{b}=\frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

EXEMPLUM 1

390. Sit vis centripeta ipsis distantiis corporis a centro proportionalis; fiet $P=\frac{y}{f}$. Quare erit

$$\int Pdy=\frac{y^2-a^2}{2f} \quad \text{atque} \quad v=\frac{a^2-y^2}{2f}=\frac{p^2}{b}.$$

Quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi inter p et y. Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui est

1) Vide notam 1 p. 164. P. St.

mensura anguli ACM, et y est haec

$$ds = \frac{-a\,dy\sqrt{b(a^2-y^2)}}{y\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}.$$

Huius curvae punctum infimum seu centro proximum habetur ponendo vel $dy=0$ vel $p=y$; tum autem erit

$$y = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}};$$

haec ergo est minima curvae a centro C distantia. Radius osculi huius curvae in quovis puncto est

$$= \frac{2py}{bP} = \sqrt{\frac{2f(a^2-y^2)}{b}}.$$

In puncto ergo centro proximo radius osculi est maximus, quippe

$$= \frac{2af}{\sqrt{b(b+2f)}}.$$

Ponatur tangens anguli $ACM = t$ posito sinu toto $=1$; erit

$$\frac{ds}{a} = \frac{dt}{1+tt};$$

ponatur porro

$$\frac{\sqrt{b(a^2-y^2)}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}} = q;$$

habebitur ista aequatio

$$\frac{dt}{1+tt} = \frac{dq}{1+qq} - \frac{dq}{1+\frac{b+2f}{b}qq}.$$

Ex quo intelligitur curvam toties esse algebraicam, quoties est $\frac{b}{b+2f}$ numerus quadratus. Longitudo curvae AM est porro generaliter

$$= \int \frac{-y\,dy}{\sqrt{(y^2+b\int P\,dy)}};$$

hoc ergo casu erit

$$AM = \int \frac{-y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}} = \frac{2af-\sqrt{2f(2fyy+byy-a^2b)}}{2f+b}.$$

Ex qua aequatione sequitur curvam brachystochronam AM esse hypocycloidem, quae generatur rotatione circuli, cuius diameter est

$$=\frac{a\sqrt{(b+2f)}-a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}},$$

super concava parte peripheriae AE centro C radio AC descriptae. Cum igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides super peripheria AE natas esse brachystochronas.

EXEMPLUM 2

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum, ut sit $P=\frac{f^2}{y^2}$; unde erit

$$\int P\,dy=\frac{-f^2}{y}+\frac{f^2}{a}=\frac{f^2(y-a)}{ay} \quad \text{atque} \quad v=\frac{f^2(a-y)}{ay}=\frac{p^2}{b},$$

quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi. Altera vero aequatio inter arcum s et y erit ista

$$ds=\frac{-a\,dy\sqrt{bf^2(a-y)}}{y\sqrt{(ay^3+bf^2y-abf^2)}}.$$

Huius ergo curvae punctum infimum posito $dy=0$ determinabitur ope huius aequationis cubicae $ay^3+bf^2y=abf^2$. Ceterum ista aequatio inter s et y sufficit ad curvam quaesitam construendam.

SCHOLION 2

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propositionibus allata sunt, intelligitur, quomodo in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi ea linea sit invenienda, super qua corpus ex dato puncto ad datum punctum citissime perveniat. Nunc ergo etiam determinari oportet eam lineam, super qua corpus a dato puncto citissime non ad datum punctum, sed ad datam lineam perveniat, quae sane curva una erit ex infinitis brachystochronis; at quaenam ea sit, in sequente propositione declarabimus.

PROPOSITIO 44

THEOREMA

393. *Corpus a dato puncto A (Fig. 49) ad quamvis lineam datam BM celerrime pervenit super linea brachystochrona AM, quae datae lineae BM ad angulos rectos occurrit, hocque in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi.*

DEMONSTRATIO

Sit AM ea linea, super qua corpus ex A citissime ad lineam BM perveniat; perspicuum est primo hanc lineam fore brachystochronam; nam si daretur linea, super qua corpus citius ab A ad M perveniret, ea potius quaesito satisfaceret. Praeterea haec linea AM ad angulos rectos in M curvae BM occurrit; nisi enim ad angulos rectos occurreret, ducta minima normali mn ob $mn < mM$ corpus citius per Amn ad curvam BM perveniret quam per AmM. Quare ne haec exceptio locum invenire possit, necesse est, ut curva AM datae curvae normaliter insistat. Consequenter corpus super ea infinitarum brachystochronarum ex A ad curvam BM ductarum citissime ad curvam BM pervenit, quae curvae BM ad angulos rectos occurrit. Q. E. D.

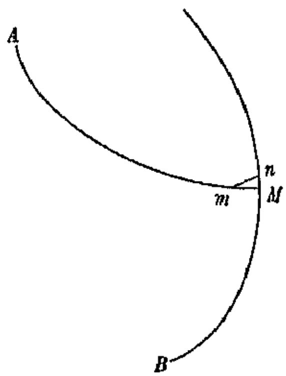


Fig. 49.

COROLLARIUM 1

394. Si ergo infinitae curvae quaerantur, super quibus corpus dato tempore ab A ad lineam BM perveniat, oportet, ut datum tempus sit maius quam tempus per brachystochronam AM; alias enim problema fieret impossibile.

COROLLARIUM 2

395. Si accidat, ut plures curvae brachystochronae sint normales in curvam BM, plura quoque prodibunt tempora minima vel maxima. Haec enim methodus tam minima quam maxima declarat.

COROLLARIUM 3

396. Quia tempus per curvam brachystochronam AM est minimum, intelligitur ex methodo maximorum et minimorum, si duae brachystochronae proximae concipiantur normaliter insistentes curvae BM, tempora per eas esse inter se aequalia.

COROLLARIUM 4

397. Hinc porro perspicitur, si curva BM fuerit eiusmodi, ut omnes brachystochronas ex puncto A ductas secet ad angulos rectos, tempora per omnes brachystochronas ad curvam BM usque ductas fore inter se aequalia.

COROLLARIUM 5

398. Quamobrem curva, quae ab omnibus curvis brachystochronis ex puncto A ductis arcus isochronos seu eodem tempore percursos abscindit, ea quoque omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit seu erit illarum traiectoria orthogonalis.

COROLLARIUM 6

399. Atque vicissim quoque perspicitur, si curva, quae ab infinitis curvis arcus isochronos abscindit, fuerit earum traiectoria orthogonalis, eas infinitas curvas omnes esse brachystochronas.

SCHOLION

400. Facile intelligitur hanc propositionem locum quoque habere in medio resistente; simili enim modo apparet tempus per elementum mn normale in curvam BM minus esse quam tempus per elementum mM, quod non est perpendiculare; in hoc autem totius demonstrationis vis est sita. Quare si infinitis curvis ex puncto A eductis lex potentiarum sollicitantium et resistentiae poterit inveniri, in qua eae curvae omnes sint brachystochronae, simul harum curvarum traiectoria orthogonalis poterit exhiberi quaerendo tantum curvam ab iis curvis arcus isochronos abscindentem. Atque hanc ipsam traiectorias orthogonales inveniendi methodum iam adhibuit Cel. Ioh. Bernoulli in Act. Lips. A. 1697.[1])

---

1) Vide notam 1 p. 163. P. St.

PROPOSITIO 45

PROBLEMA

401. *Inter omnes curvas puncta A et C* (Fig. 50) *iungentes et aequaliter longas eam determinare AMC, super qua corpus celerrime ex A ad C perveniat, in hypothesi potentiae sollicitantis uniformis g et deorsum directae.*

SOLUTIO

Ducta verticali AP et horizontali PM dicatur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ eritque tempus, quo arcus AM absolvitur,

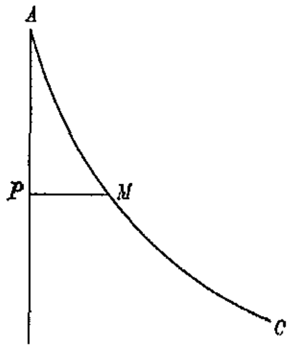


Fig. 50.

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}.$$

Iam per methodum isoperimetricorum, de qua peculiarem dedi dissertationem cum formulis generalibus, ex quibus quaevis problemata facile resolvi possunt, in Comment. Acad. Petr. A. 1733[1]), duae quantitates considerandae sunt: arcus $AM = s = \int ds$ et tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius respectu debet esse minima vel maxima. Eodem enim redit, sive inter omnes curvas aeque longas quaeratur ea, quae brevissimum habeat descensum, sive inter omnes, super quibus descensus fiunt eodem tempore, ea, quae est brevissima. Per formulas autem meas dat $\int ds$ hanc quantitatem $diff. \frac{dy}{ds}$ et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat $diff. \frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius multiplo cuicunque aequalis est ponenda. Habetur ergo integrando

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy\sqrt{a}}{ds\sqrt{x}} - m$$

seu

$$dy(\sqrt{a} - \sqrt{x}) = mds\sqrt{x}.$$

1) L. Euleri Commentatio 27 (indicis Enestroemiani): *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 123; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 25. P. St.

Sumendis vero quadratis erit

$$dy^2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 = m^2 x dx^2 + m^2 x dy^2,$$

unde erit

$$dy = \frac{m dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a - 2\sqrt{ax} + (1-m^2)x)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{(a - 2\sqrt{ax} + (1-m^2)x)}}.$$

Ex quo curva quaesita determinabitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

402. In aequatione inventa duae insunt quantitates a et m arbitrariae, quibus effici potest, ut curva per datum punctum C transeat et ut simul sit datae longitudinis. Atque tum haec curva celerrime absolvetur inter omnes alias curvas eiusdem longitudinis per A et C transeuntes.

COROLLARIUM 2

403. Si ponantur a et m infinite magna, prodibit cyclois, quae non solum inter omnes curvas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino citissime absolvitur.

COROLLARIUM 3

404. Si ponatur $m = 0$, prodit $dy = 0$ seu recta verticalis. At si fiat $a = 0$, oritur recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linea inter omnes lineas, quae eodem tempore absolvuntur, minima seu brevissima.

COROLLARIUM 4

405. Si ponatur $m = 1$, prodibit curva algebraica; erit enim

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a - 2\sqrt{ax})}},$$

cuius integralis est

$$y = \frac{-(4a + 4\sqrt{ax} + 6x)\sqrt{(a - 2\sqrt{ax})}}{15\sqrt{a}} + \frac{4a}{15}.$$

Haec curva etiam est rectificabilis; namque erit

$$s = \frac{2a}{5} - \frac{(2a + 2\sqrt{ax} - 2x)}{5\sqrt{a}}\sqrt{(a - 2\sqrt{ax})}.$$

Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi; erit enim

$$\int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{a}}{3} - \frac{(4\sqrt{a} - 2\sqrt{x})\sqrt{(a - 2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}.$$

Aequatio vero pro curva reducta fit ordinis quinti.

COROLLARIUM 5

406. Si in hac curva sumatur $x = \frac{a}{4}$, ibi tangens erit horizontalis atque recta verticalis in eo curvae puncto erit diameter curvae. Illo autem loco fit $y = \frac{4a}{15}$ et longitudo curvae ad hoc punctum erit $= \frac{2a}{5}$. Atque tempus, quo hic arcus absolvitur, est $= \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{g}}$. Eodem ergo tempore corpus recta descendet per altitudinem $\frac{4}{9}a$.

SCHOLION

407. Missis nunc hisce de celerrimo descensu progredimur ad eas curvas considerandas, super quibus plures descensus inter se comparati datam teneant relationem. Huc maxime pertinet quaestio de curvis tautochronis, super quibus vel omnes descensus ad punctum infimum curvae usque fiunt eodem tempore vel integrae oscillationes. Ad haec deinde aliae accedere possunt quaestiones cum difficiles tum vim methodi, qua utemur, illustrantes.

PROPOSITIO 46

PROBLEMA

408. *Invenire legem generalem curvarum tautochronarum, super quibus omnes descensus ad punctum A, initio descensus ubicunque in curva AM* (Fig. 51, p. 183) *accepto, absolvantur eodem tempore.*

SOLUTIO

Sumta recta AP pro axe dicatur curvae portio $AM = s$ sitque altitudo celeritati in A debita $= b$ et altitudo celeritati in M debita $= v$; erit tempus, quo arcus AM absolvitur,

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}},$$

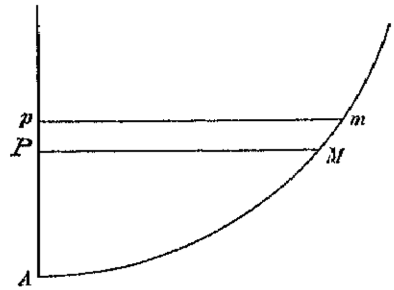


Fig. 51.

quod integrale ita est capiendum, ut evanescat posito $s = 0$. Tum, si in eo integrali ponatur $v = 0$, habebitur tempus descensus a loco, in quo celeritas erat nulla, usque ad punctum A seu totum descensus tempus; id quod eadem quantitate expressum esse debet, quaecunque fuerit quantitas b. Haec igitur quantitas b neque in expressione temporis inesse debet neque in expressione pro curva AM, quia haec eadem curva idem descensus tempus producere debet, utcunque varietur b.

Sit iam v quantitas composita ex littera z, ad curvam pertinente et a curva AM cum abscissa AP et applicata PM tantum pendente neque b involvente, atque ex littera h, quae ex b et quantitatibus constantibus sit composita. Sit autem v talis ipsarum h et z functio, ut evanescat posito $z = h$ atque ut fiat $= b$, si sit $z = \alpha h$ existente α numero quocunque. Ponatur porro $ds = pdz$ pro aequatione curvae quaesitae; debebit p talis esse quantitas, in qua non contineatur b vel h, quia hae litterae in aequationem curvae ingredi nequeunt. Habebimus ergo pro expressione temporis per AM

$$\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$$

hoc integrali ita accepto, ut evanescat posito $v = b$ seu $z = \alpha h$. Deinde hoc integrale, si in eo ponatur $z = h$, dabit tempus totius descensus, in quo h inesse non poterit. Hoc vero evenit, si $\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipsarum h et z nullius dimensionis seu si $\frac{pz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis. Sit v functio m dimensionum ipsarum h et z; debebit esse

$$p = Cz^{\frac{m-2}{2}}$$

denotante C quantitatem constantem a h non pendentem. Quoties ergo pro v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curva quaesita haec aequatio

$$ds = Cz^{\frac{m-2}{2}}dz \quad \text{seu} \quad s = \frac{2Cz^{\frac{m}{2}}}{m} + \text{const.},$$

si opus est, quo s evanescat, si in z evanescat vel x vel y. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi, oportet, ut v quantitatibus finitis sit expressum atque ut ea expressio transmutari possit in functionem homogeneam ex h et z constantem.

COROLLARIUM 2

410. Hanc ob rem necesse est, ut fiat $v = h$, si ponatur $z = ch$, quo in quantitate constante adiecta etiam non reperiatur h. Sufficit igitur, si viderimus fieri $v = h$ facto $z = ah$, neque opus est, ut integratio absolvatur.

COROLLARIUM 3

411. Intelligitur etiam curvam in A habere debere tangentem normalem in directionem vis sollicitantis; nisi enim hoc fuerit, tempus per arcum descensus infinite parvum foret quoque infinite parvum.

SCHOLION

412. Valet haec solutio non solum, si, uti figura indicat, curva exponatur per coordinatas orthogonales; nihil enim interest, quibusnam quantitatibus naturam curvae exponere velimus, dummodo in z non ingrediatur h. Potest autem z continere lineas et quantitates quascunque a curva pendentes. Hac igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi, lineae tautochronae poterunt inveniri, quia semper celeritas per quantitates finitas exprimi potest. At si, ut in mediis resistentibus fieri solet, celeritas non potest exhiberi finitis quantitatibus, haec methodus usum habere nequit, sed alia desideratur, quae succedit, etiam si celeritas per aequationem differentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47

PROBLEMA

413. *Si corpus deorsum sollicitetur vi quacunque, invenire lineam tautochronam, super qua omnes descensus fiant eodem tempore.*

SOLUTIO

Posito $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ (Fig. 51, p. 183) sit celeritas in A debita altitudini b et in M debita altitudini v. Sit porro vis sollicitans in $M = P$; erit $v = b - \int Pdx$ integrali $\int Pdx$ ita accepto, ut evanescat facto $x = 0$. Iam si ponatur $b = h$ et $\int Pdx = z$, erit v functio unius dimensionis ipsarum h et z et evanescit facto $z = h$ fitque $v = b$ facto $z = 0$. Erit igitur $m = 1$ ideoque habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$ds = \frac{Cdz}{\sqrt{z}} \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int Pdx}.$$

Si desideretur aequatio inter x et y, erit ob $ds = \frac{aPdx}{\sqrt{a\int Pdx}}$

$$dy = \frac{dx\sqrt{(aP^2 - \int Pdx)}}{\sqrt{\int Pdx}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

414. Quia evanescit $\int Pdx$ facto $x = 0$, tangens curvae in A erit horizontalis, nisi in A evanescat P. Atque curva alicubi habebit tangentem verticalem ibique plerumque cuspidem; hoc evenit, ubi erit $\int Pdx = aP^2$. Ibi enim fit $dy = 0$.

COROLLARIUM 2

415. Huius curvae in puncto infimo A radius osculi est aequalis subnormali $= \frac{ydy}{dx} = \frac{sds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius osculi $= 2aP$, ubi P denotat potentiam sollicitantem in puncto A.

denotante C quantitatem constantem a b non pendentem. Quoties ergo pro v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curva quaesita haec aequatio

$$ds = Cz^{\frac{m-2}{2}} dz \quad \text{seu} \quad s = \frac{2Cz^{\frac{m}{2}}}{m} + \text{const.},$$

si opus est, quo s evanescat, si in z evanescat vel x vel y. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi, oportet, ut v quantitatibus finitis sit expressum atque ut ea expressio transmutari possit in functionem homogeneam ex h et z constantem.

COROLLARIUM 2

410. Hanc ob rem necesse est, ut fiat $v = b$, si ponatur $z = \alpha h$, quo in quantitate constante adiecta etiam non reperiatur h. Sufficit igitur, si viderimus fieri $v = b$ facto $z = \alpha h$, neque opus est, ut integratio absolvatur.

COROLLARIUM 3

411. Intelligitur etiam curvam in A habere debere tangentem normalem in directionem vis sollicitantis; nisi enim hoc fuerit, tempus per arcum descensus infinite parvum foret quoque infinite parvum.

SCHOLION

412. Valet haec solutio non solum, si, uti figura indicat, curva exponatur per coordinatas orthogonales; nihil enim interest, quibusnam quantitatibus naturam curvae exponere velimus, dummodo in z non ingrediatur b. Potest autem z continere lineas et quantitates quascunque a curva pendentes. Hac igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi, lineae tautochronae poterunt inveniri, quia semper celeritas per quantitates finitas exprimi potest. At si, ut in mediis resistentibus fieri solet, celeritas non potest exhiberi finitis quantitatibus, haec methodus usum habere nequit, sed alia desideratur, quae succedit, etiam si celeritas per aequationem differentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47

PROBLEMA

413. *Si corpus deorsum sollicitetur vi quacunque, invenire lineam tautochronam, super qua omnes descensus fiant eodem tempore.*

SOLUTIO

Posito $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ (Fig. 51, p. 183) sit celeritas in A debita altitudini b et in M debita altitudini v. Sit porro vis sollicitans in $M = P$; erit $v = b - \int Pdx$ integrali $\int Pdx$ ita accepto, ut evanescat facto $x = 0$. Iam si ponatur $b = h$ et $\int Pdx = z$, erit v functio unius dimensionis ipsarum h et z et evanescit facto $z = h$ fitque $v = b$ facto $z = 0$. Erit igitur $m = 1$ ideoque habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$ds = \frac{Cdz}{\sqrt{z}} \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int Pdx}.$$

Si desideretur aequatio inter x et y, erit ob $ds = \frac{aPdx}{\sqrt{a\int Pdx}}$

$$dy = \frac{dx\sqrt{(aP^2 - \int Pdx)}}{\sqrt{\int Pdx}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

414. Quia evanescit $\int Pdx$ facto $x = 0$, tangens curvae in A erit horizontalis, nisi in A evanescat P. Atque curva alicubi habebit tangentem verticalem ibique plerumque cuspidem; hoc evenit, ubi erit $\int Pdx = aP^2$. Ibi enim fit $dy = 0$.

COROLLARIUM 2

415. Huius curvae in puncto infimo A radius osculi est aequalis subnormali $= \frac{ydy}{dx} = \frac{sds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius osculi $= 2aP$, ubi P denotat potentiam sollicitantem in puncto A.

COROLLARIUM 3

416. Ex radio osculi in A et potentia sollicitante in A invenitur tempus ascensus vel descensus per infinite parvum arcum

$$= \frac{\pi\sqrt{4aP}}{2\sqrt{P}} = \pi\sqrt{a}.$$

(§ 172). Huicque tempori tempus cuiusque descensus est aequale. In hypothesi ergo gravitatis $=1$ pendulum longitudinis $2a$ descensus infinite parvos eodem tempore absolvet.

EXEMPLUM 1

417. Sit potentia sollicitans ubique constans, nempe $P = g$; erit

$$\int P dx = gx \quad \text{atque} \quad s = 2\sqrt{gax}$$

itemque

$$dy = \frac{dx\sqrt{(ga - x)}}{\sqrt{x}},$$

unde intelligitur curvam esse cycloidem deorsum convexam, prorsus cum linea brachystochrona in eadem potentiae hypothesi congruentem. Quod autem omnes descensus fiant eodem tempore super cycloide, iam supra demonstravimus (§ 187).

EXEMPLUM 2

418. Sit potentia sollicitans ut potestas quaecunque ipsius x; erit

$$P = \frac{x^n}{f^n} \quad \text{et} \quad \int P dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

si quidem fuerit $n+1$ numerus affirmativus; sin enim esset $n+1$ numerus negativus, fieret $\int P dx = \infty$. Erit igitur

$$s = \frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{a}{n+1}} \quad \text{atque} \quad dy = \frac{dx\sqrt{((n+1)ax^{n-1} - f^n)}}{\sqrt{f^n}}.$$

Ex qua aequatione intelligitur curvam fore rectam utcunque inclinatam ad horizontem, si fuerit $n = 1$. At si $n > 1$, curva in initio A fit imaginaria, quo usque nimirum f^n incipit minus esse quam $(n+1)ax^{n-1}$.

SCHOLION 1

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diametrum curvae. Quare cum in vacuo ascensus sint similes descensibus, semioscillationes omnes super curva MA ad alteram partem usque producta erunt quoque isochronae et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde cum ob arbitrariam a infinitae sint curvae tautochronae AM, duae quaeque in puncto A coniunctae, ut ibi habeant tangentem communem horizontalem, producent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas, si scilicet pendulum ita accommodetur, ut oscillando huiusmodi curvas absolvat.

SCHOLION 2

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curvas, quas invenimus, esse solas, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z substitui nequit, ut in integrali, si ponatur $v = 0$, prorsus ex formula exeant b seu h. Id quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inventae, non satis liquet.

SCHOLION 3

421. Quia est $s = 2\sqrt{a\int P\,dx}$, erit $P = \frac{s\,ds}{2a\,dx}$. Ex quo apparet, cuiusmodi esse debeat potentia sollicitans, ut data curva sit tautochrona. Scilicet potentia deorsum tendens debet esse proportionalis ipsi $\frac{s\,ds}{dx}$ ex data curva desumto. Quare, nisi curva sit rectificabilis, valor potentiae sollicitantis non potest algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48

PROBLEMA

422. *Si corpus perpetuo trahatur ad centrum virium C* (Fig. 52, p. 188) *vi quacunque, invenire lineam tautochronam BMA, super qua corpus omnes descensus ad punctum A usque eodem tempore absolvat.*

SOLUTIO

Dicatur $CA = c$, $CM = y$ et vis centripeta in M corpus sollicitans $= P$. Sit porro celeritas in A debita altitudini b et ea in M altitudini v. Sumatur

$\int P dy$ ita, ut evanescat posito $y = c$, quo facto erit $v = b - \int P dy$. Sumtis ergo b pro h et $\int P dy$ pro z erit functio ipsarum h et z, cui v aequatur, unius dimensionis; quare erit $m = 1$. Si nunc arcus AM dicatur $= s$, erit

$$s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int P dy}$$

atque hinc

$$ds = \frac{aPdy}{\sqrt{a\int Pdy}}.$$

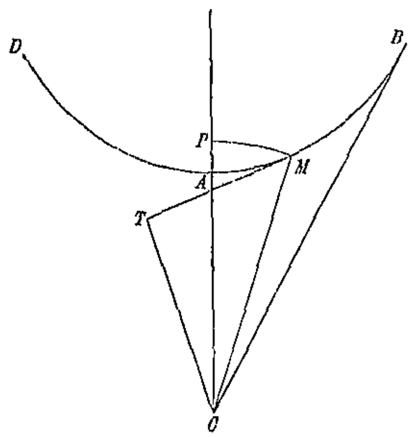


Fig. 52.

Si nunc in M ducatur tangens in eamque ex centro C demittatur perpendiculum CT, quod dicatur p, erit

$$\frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}} = ds.$$

Quare habebitur

$$y^2 \int P dy = (y^2 - p^2) a P^2 \quad \text{seu} \quad p^2 = y^2 - \frac{y^2 \int P dy}{aP^2},$$

aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

423. In puncto A, ubi $\int P dy$ evanescit, erit $p = y$, seu recta CA erit normalis in curvam in eoque propterea celeritas corporis erit maxima, quia A est punctum curvae centro C proximum.

COROLLARIUM 2

424. Si ponatur $p = 0$, habebitur punctum curvae B, in quo recta CB curvam tangit. In eoque puncto, quod erit supremum, curva cuspidem habebit. Invenitur vero punctum B ex hac aequatione $aP^2 = \int P dy$; atque y non poterit esse maior quam valor ex hac aequatione inventus.

COROLLARIUM 3

425. Apparet etiam ex aequatione inventa $s = 2\sqrt{a\int P dy}$, quia signum radicale signum ambiguum involvit, curvam duos habere ramos AB et AD inter se similes et aequales et hanc ob rem oscillationes, quae super curva BAD fiunt, esse inter se aequales.

COROLLARIUM 4

426. Radius osculi in puncto A est $= \frac{2acP}{c-2aP}$. Et quia est $AC = c$, erit tempus, quo unus descensus super curvae AB portione infinite parva absolvitur, $= \pi \sqrt{a}$ (§ 207); huic igitur tempori omnes descensus erunt aequales. Hanc ob rem oscillationes, quae fiunt super curva BAD, isochronae erunt cum oscillationibus penduli in hypothesi gravitatis $= 1$, cuius longitudo est $= 2a$.

EXEMPLUM 1

427. Sit vis centripeta directe proportionalis distantiis a centro, ut sit $P = \frac{y}{f}$; erit

$$\int Pdy = \frac{y^2 - c^2}{2f}.$$

Hinc ergo erit

$$AM = s = \sqrt{\frac{2a(y^2-c^2)}{f}} \quad \text{atque} \quad p^2 = yy - \frac{f(yy-cc)}{2a}.$$

Huius curvae radius osculi in puncto M, qui est $\frac{ydy}{dp}$, invenitur

$$= \frac{2a}{2a-f} \sqrt{\frac{(2a-f)y^2 + fc^2}{2a}}.$$

Ex quo sequitur, si fuerit $2a < f$, curvam versus centrum C fore convexam, ut exhibet figura. At si fuerit $2a = f$, curva evadet linea recta in A normalis ad rectam AC. Punctum autem B, ubi CB tangit curvam, invenitur ex hac aequatione

$$(f-2a)yy = ccf,$$

ex qua fit

$$BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}.$$

Quoties ergo accidit, ut sit $f > 2a$ seu curva convexa versus C, habebit curva cuspidem in B. Atque in his casibus curva erit hypocyclois, quae generatur rotatione circuli, cuius diameter est

$$= \frac{c\sqrt{f} - c\sqrt{(f-2a)}}{\sqrt{(f-2a)}},$$

super concava parte circuli centro C radio

$$= \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}$$

descripti. Hoc ergo casu curvae tautochronae conveniunt cum brachystochronis supra inventis (§ 390).

At si $2a > f$, quo casu curva est concava versus C, fit BC imaginaria et curva AM non amplius est hypocyclois. Tum autem erit

$$p^2 = \frac{(2a-f)yy + ccf}{2a},$$

unde p ubique praeter in A erit maior quam AC. Sit $c = 0$; fiet $p = y\sqrt{\frac{2a-f}{2a}}$, quare hoc casu curvae tautochronae erunt omnes spirales logarithmicae circa centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali logarithmica perpetuo eodem tempore ad centrum C pertinget, ubicunque descensum inceperit. Hac igitur vis centripetae hypothesi tautochronae erunt: primo omnes hypocycloides, deinde omnes lineae rectae utcunque ductae, tertio omnes spirales logarithmicae et quarto infinitae curvae aliae hac aequatione contentae $p^2 = \frac{(2a-f)y^2 + ccf}{2a}$, si quidem fuerit $2a > f$ et c non $= 0$. In hac autem vis centripetae hypothesi pro tautochronis tantum dederunt hypocycloides NEUTONUS in *Princ.*[1]) et HERMANNUS in *Phoronomia* et Comment. Acad. Petrop. A. 1727[2]), quamvis hic aequationem aeque generalem ac nostram habuerit.

EXEMPLUM 2

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum a centro, ut sit $P = \frac{ff}{yy}$; erit

$$\int P dy = \frac{-ff}{y} + \frac{ff}{c} = \frac{ff(y-c)}{cy}.$$

Curva igitur AM erit

$$= 2f\sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}} \quad \text{atque} \quad pp = \frac{acffyy + cy^5 - y^6}{acff},$$

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. I propositio LI, theorema XVIII. P. St.

2) IAC. HERMANN, *Phoronomia*, Amstelodami 1716, p. 89; *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpora indesinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139, vide praecipue p. 150. P. St.

unde invenitur radius osculi

$$\frac{ydy}{dp} = \frac{2fy\sqrt{ac(acff + cy^3 - y^4)}}{2acff + 5cy^3 - 6y^4}.$$

Ubi ergo p evanescit, ibi etiam radius osculi fit $= 0$. Ipsius BC valor autem reperietur ex hac aequatione $y^4 = cy^3 + acff$. Si igitur ponatur $BC = k$, erit $a = \frac{k^4 - ck^3}{cff}$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceterum apparet hanc curvam intra A et B habere posse punctum flexus contrarii, id quod evenit, si curva in A est concava versus C, nempe si fuerit $2aff > c^3$.

EXEMPLUM 3

429. Sit vis centripeta ubique constans seu $P = 1$; erit $\int Pdy = y - c$. Quare si centro C radio CM ducatur arcus MP, erit $\int Pdy = AP$ atque

$$\text{arcus } AM = 2\sqrt{a(y-c)} = 2\sqrt{a \cdot AP}.$$

At erit porro

$$p^2 = y^2 - \frac{y^2(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^2 - y^3}{a},$$

unde invenitur $BC = a + c$ et curva $AB = 2a = 2(BC - AC)$. Radius osculi vero in puncto M erit

$$= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a + 2c - 3y}.$$

In puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curva igitur in A erit concava versus C, si $2a > c$, at convexa, si $c > 2a$, atque radius osculi in A erit infinite magnus, si $2a = c$. Primo casu, quo curva in A est concava versus C, curva habebit punctum flexus contrarii, ubi est

$$CM = \frac{2}{3}(a + c) = \frac{2}{3}BC.$$

Si est $c = 0$ ita ut punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda huius curvae eritque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curvae radius osculi in ipso centro C est infinite parvus, atque est

$$p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}};$$

curva autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PROPOSITIO 49

PROBLEMA

430. *Si corpus sollicitetur a potentiis quibuscunque, invenire curvam AM (Fig. 53), super qua omnes descensus ad punctum A usque fiant aequalibus temporibus.*

SOLUTIO

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes reduci possunt ad duas, quarum altera corpus perpetuo deorsum trahat secundum MQ, altera vero horizontaliter secundum MP. Sit vis, quae secundum MQ trahit, $=P$ et vis, quae secundum MP trahit, $=Q$; dicantur $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$ sitque celeritas in puncto A debita altitudini b et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit

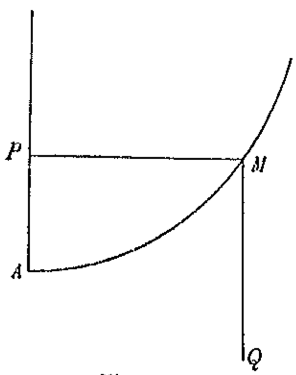


Fig. 53.

$$v=b-\int Pdx-\int Qdy.$$

Quare si ponatur $h=b$ et $\int Pdx+\int Qdy=z$, erit v functio unius dimensionis ipsarum h et z et propterea $m=1$ (§ 408). Quamobrem habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$s=2\sqrt{az}=2\sqrt{a}\left(\int Pdx+\int Qdy\right)$$

seu

$$ds=\frac{aPdx+aQdy}{\sqrt{a(\int Pdx+\int Qdy)}}.$$

At quia est $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, erit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{aPQ\pm\sqrt{(\int Pdx+\int Qdy)(aP^2-\int Pdx-\int Qdy+aQ^2)}}{\int Pdx+\int Qdy-aQ^2}.$$

In ipso ergo principio A, ubi est $\int Pdx+\int Qdy=0$, erit $Pdx+Qdy=0$ seu $dy:dx=-P:Q$. Atque ut ex praecedentibus intelligitur, tempus cuiusque descensus aequatur tempori, quo in hypothesi gravitatis $=1$ pendulum longitudinis $2a$ descensum absolvit. Q. E. I.

SCHOLION

431. Si habeatur curva, super qua omnes descensus fiunt eodem tempore, facile erit dare curvas, super quibus oscillationes omnes eodem tempore peragantur. Nam quia in vacuo ascensus similes sunt descensibus, omnis curva, quae est tautochrona pro descensibus, talis quoque erit pro ascensibus. Quare duae curvae tautochronae coniunctae in puncto A dabunt curvam, super qua omnes oscillationes sunt isochronae. Attamen hac ratione alterum problema, quo curvae omnes oscillationes isochronas producentes requiruntur, non perfecte solvitur; dari enim possunt curvae infinitae huic quaestioni satisfacientes, quarum tamen partes non sint aptae ad descensus solos isochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi potest: data curva quacunque invenire aliam, quae cum ea coniuncta producat omnes oscillationes aequidiurnas.[1]) Nunc vero antequam ad haec progrediamur, aliud problema proferemus, in quo quaeritur curva datae curvae adiungenda, ut omnes descensus super hac curva composita absolvantur temporibus aequalibus. Quod problema ut maxime difficillimum mihi quondam erat propositum a Cl. DAN. BERNOULLI.[2]) Attamen hac methodo, qua in investigatione tautochronarum utor, etiam istud problema resolvi potest.

PROPOSITIO 50

PROBLEMA

432. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis si detur curva* ANB (Fig. 54, p. 194), *invenire curvam* BMF *ei adiungendam, ut omnes descensus super hac curva composita ad* A *usque absolvantur aequalibus temporibus, in quocunque curvae* BMF *puncto descensus incipiat.*

---

1) L. EULERI Commentatio 12 (indicis ENESTROEMIANI): *De innumerabilibus tautochronis in vacuo*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 49; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

2) Vide L. EULERI Commentationem 24 (indicis ENESTROEMIANI): *Solutio singularis casus circa tautochronismum*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 28; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

SOLUTIO

Si descensus incipiat in infimo curvae quaesitae puncto B, descensus fiet per datam curvam BNA tantum; eius ergo tempori, quod etiam dabitur, aequalia esse debent omnium descensuum tempora. Sit $AD = a$, $AQ = u$, $AN = t$ dabiturque aequatio inter u et t. Pro curva autem quaesita sit $BP = x$ et $BM = s$. Nunc in descensu quocunque sit celeritas in puncto B debita altitudini b; erit celeritas in M debita altitudini $b - x$ atque celeritas in N debita altitudini $a + b - u$. Tempus ergo descensus per curvam incognitam est

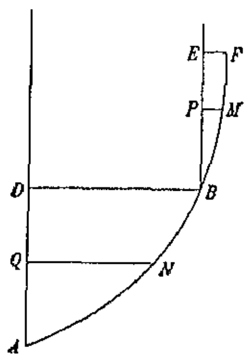


Fig. 54.

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}},$$

ita integratum, ut evanescat posito $x = 0$ et post integrationem posito $x = b$. Tempus vero per curvam cognitam BNA erit

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

ita integratum, ut evanescat posito $u = 0$ atque post integrationem posito $u = a$. Expressio ergo $\int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$, postquam factum est $x = b$, ita debet esse comparata, ut, si addatur ad expressionem temporis per BNA, ex aggregato penitus egrediatur littera b; tum enim totius tempus descensus erit quantitas constans neque pendens a b seu a puncto curvae BMF, in quo descensus incepit. Sit integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

postquam positum est $u = a$, aequale huic seriei

$$k + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \delta b^4 + \text{etc.} + \zeta \sqrt{b} + \eta b \sqrt{b} + \theta b^2 \sqrt{b} + \iota b^3 \sqrt{b} + \text{etc.}$$

Quare si descensus in puncto B incipiat, tempus totius descensus erit $= k$ ob evanescentem b. Ipsi k ergo aequale esse debet tempus totius descensus per curvam compositam, in quocunque curvae BMF puncto ponatur initium

descensus. Sit nunc curvae quaesitae BMF natura sequente serie expressa

$$ds = -Adx\sqrt{x} - Bxdx\sqrt{x} - Cx^2dx\sqrt{x} - Dx^3dx\sqrt{x} - \text{etc.}$$
$$- Fdx - Gxdx - Hx^2dx - Ix^3dx - \text{etc.}$$

Ponatur peripheriae ad diametrum ratio $\pi:1$, quae revera est $l-1:-\sqrt{-1}$, ita ut sit

$$\pi = -\frac{l-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\cdot l-1.$$

Est vero post integrationem posito $x = b$

$$\int\frac{Adx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2}\pi Ab,\quad \int\frac{Bxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\pi Bb^2,\quad \int\frac{Cx^2dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\pi Cb^3 \quad \text{etc.}$$

atque

$$\int\frac{Fdx}{\sqrt{(b-x)}} = 2F\sqrt{b},\quad \int\frac{Gxdx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3}2Gb\sqrt{b},\quad \int\frac{Hx^2dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}2Hb^2\sqrt{b} \quad \text{etc.}$$

Quo igitur horum terminorum cum illis terminis coniunctim tempus per BNA exprimentibus aggregatum aequetur ipsi k, termini homogenei b involventes sese tollere debent. Fiet igitur

$$\frac{1}{2}\pi A = \alpha \quad \text{seu} \quad A = \frac{2}{1}\cdot\frac{\alpha}{\pi}$$

similique modo

$$B = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{\beta}{\pi},\quad C = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\frac{\gamma}{\pi} \quad \text{etc.}$$

atque

$$F = \frac{\zeta}{2},\quad G = \frac{3}{2}\cdot\frac{\eta}{2},\quad H = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{\theta}{2},\quad I = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\iota}{2} \quad \text{etc.}$$

Quamobrem, cum α, β, γ, δ etc., ζ, η, θ, ι etc. sint quantitates cognitae propter curvam ANB datam, habebitur pro curva quaesita BMF ista aequatio

$$ds = \frac{-dx}{\pi}\left(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\beta x\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\gamma x^2\sqrt{x} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{dx}{2}\left(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\theta x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\iota x^3 + \text{etc.}\right),$$

cuius integralis est

$$s = \frac{-2}{\pi}\left(\frac{2}{3}\alpha x\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\beta x^2\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\gamma x^3\sqrt{x} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\zeta x + \frac{3}{4}\eta x^2 + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\theta x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\iota x^4 + \text{etc.}\right).$$

Cuius seriei hanc do constructionem: sumatur

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

ita ut evanescat posito $u=0$; tum fiat $u=a$ et prodibit functio quaedam ipsius b. Ponatur $x(1-z)$ loco b, et quod prodit, sit R. Tum integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$, dum x ut constans consideretur, ita ut evanescat posito $z=0$. Deinde ponatur $z=1$ et prodibit functio ipsius x, quae erit

$$=\frac{\pi s}{\sqrt{x}}.$$

Hocque modo prodibit aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

SCHOLION 1

433. Constructio haec prorsus singularis, sed facilis tamen, sequitur ex ea methodo, qua usus sum in aequatione a C. RICCATI quondam proposita construenda[1]), atque hac potissimum gaudet praerogativa, quod, quaecunque fuerit curva data, quaesita eius ope semper possit construi, etiamsi aequatio ipsa, quae pro curva invenitur, minime saepe tractari possit. Dat praeterea statim aequationem finitam eam, quae alias ex summatione seriorum inveniretur.

COROLLARIUM 1

434. Si in aequatione pro curva BMF inventa ponatur $x=0$, erit

$$ds = \frac{-\zeta dx}{2},$$

1) L. EULERI Commentatio 31 (indicis ENESTROEMIANI): *Constructio aequationis differentialis* $ax^n dx = dy + y^2 dx$, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 231; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 22. P. St.

unde inclinatio curvae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appareat, quomodo hae duae curvae invicem cohaereant, oportet quoque positionem tangentis curvae ANB in B determinare.

COROLLARIUM 2

435. Sit $DQ = p$ et $BN = q$ (Fig. 54, p. 194); erit $dt = -dq$ et $a - u = p$. Unde tempus per BNA erit $= \int \frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}$ posito in hoc integrali $p = a$. Sit in ipso puncto B $dq = Ldp$; erit generatim $dq = Ldp + Pdp$ existente P tali functione ipsius p, quae evanescat posito $p = 0$. Videamus ergo, evanescente p qualem terminum haec aequatio

$$\int \frac{dq}{\sqrt{(b+p)}} = \int \frac{Ldp}{\sqrt{(b+p)}}$$

producat. Prodit autem posito $p = a$

$$2L\sqrt{(b+a)} - 2L\sqrt{b},$$

unde in serie initio assumta prodit terminus $-2L\sqrt{b}$ [§ 436], qui convenit cum $\zeta\sqrt{b}$; erit ergo

$$L = -\frac{\zeta}{2} \quad \text{et} \quad dq = \frac{-\zeta dp}{2}.$$

Ex quo intelligitur curvam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B communem habere tangentem.

SCHOLION 2

436. Dixi $2L\sqrt{(b+a)} - 2L\sqrt{b}$ in serie dare hunc terminum $-2L\sqrt{b}$; nam $\sqrt{(b+a)}$ dat terminos hos $\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} +$ etc. cum aliis comparandos. Hic autem solus terminus Ldp dat terminum huius formae $\zeta\sqrt{b}$. Quare ex eo tantum de inclinatione curvae in B concludere licet.

SCHOLION 3

437. Constructio curvae quaesitae, quam dedi, etiam hoc modo immutari potest: scribatur, postquam in integrali

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$$

positum est $u = a$, loco b hoc xz et vocato eo, quod prodit, R integretur

$$\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}},$$

in quo x ut quantitas constans tractetur, ita ut evanescat posito $z = 0$. Tum ponatur $z = 1$ atque id, quod provenit, aequetur ipsi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$; hacque ratione plerumque commodius aequatio pro curva quaesita obtinetur.

EXEMPLUM 1

438. Sit curva data ANB cyclois, ita ut sit

$$t = 2\sqrt{cu} \quad \text{seu} \quad dt = \frac{cdu}{\sqrt{cu}};$$

erit

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}} = \int\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au-u^2)}} - \int\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au+bu-u^2)}}$$

$$= \sqrt{-c}\cdot l\,\frac{a-2u-2\sqrt{(u^2-au)}}{a} - \sqrt{-c}\cdot l\,\frac{a+b-2u-2\sqrt{(u^2-au-bu)}}{a+b}.$$

Ponatur $u = a$ et habebitur

$$\sqrt{-c}\cdot l - 1 - \sqrt{-c}\cdot l\,\frac{b-a-2\sqrt{-ab}}{a+b}$$

$$= \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{-c}\cdot l\left(\sqrt{b}-\sqrt{-a}\right) + \sqrt{-c}\cdot l\,(a+b)$$

$$= \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c}\cdot l\,\frac{\sqrt{b}+\sqrt{-a}}{\sqrt{b}-\sqrt{-a}}.$$

Ponatur xz loco b et habebitur

$$R = \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c}\cdot l\,\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}};$$

quo multiplicato per

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z)}}$$

habebitur

$$\frac{\pi dz\sqrt{c}}{\sqrt{(1-z)}} + \frac{dz\sqrt{-c}}{\sqrt{(1-z)}}\cdot l\,\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}},$$

cuius integrale est

$$= -2\pi\sqrt{c(1-z)} - 2\sqrt{c(z-1)} \cdot l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}} - \frac{2\sqrt{-ac}}{\sqrt{x}} \cdot l\frac{\sqrt{(z-1)}+\sqrt{z}}{\sqrt{(z-1)}-\sqrt{z}}$$
$$- \frac{2\sqrt{-c(a+x)}}{\sqrt{x}} \cdot l\frac{\sqrt{-a(1-z)}-\sqrt{z(a+x)}}{\sqrt{-a(1-z)}+\sqrt{z(a+x)}} + 2\pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c}\sqrt{-1} \cdot l-1,$$

qui duo ultimi termini sunt inter se aequales ob $\pi = \sqrt{-1} \cdot l-1$. Ponatur nunc $z = 1$; habebitur

$$\frac{-2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}}{\sqrt{x}}\pi,$$

quod aequale est ponendum ipsi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hinc provenit ista aequatio

$$s = -2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}$$

seu

$$s + ANB = ANBM = 2\sqrt{c}(AD+BP).$$

Ex quo patet curvam BMF esse continuationem datae AND, ita ut coniunctae totam cycloidem constituant; id quod ex natura tautochronismi, cui cyclois satisfacere inventa est, per se sequitur.

EXEMPLUM 2

439. Sit linea data ANB recta ad horizontem utcunque inclinata; erit $dt = ndu$ atque

$$\int\frac{ndu}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{ndu}{\sqrt{(a+b-u)}} = 2n\sqrt{a} - 2n\sqrt{(a-u)} - 2n\sqrt{(a+b)} + 2n\sqrt{(a+b-u)}.$$

Ponatur $u = a$ atque $b = xz$; erit

$$R = 2n\sqrt{a} + 2n\sqrt{xz} - 2n\sqrt{(a+xz)}.$$

Quamobrem erit

$$\int\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}} = 2n\int\frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{(1-z)}} + 2n\sqrt{x}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-z)}} - 2n\int\frac{dz\sqrt{(a+xz)}}{\sqrt{(1-z)}}$$
$$= 4n\sqrt{a} - 4n\sqrt{a(1-z)} + 2n\sqrt{x}\int\frac{zdz}{\sqrt{(z-z^2)}} - 2n\int\frac{adz+xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}.$$

Est vero

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z-zz)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-zz)}} - \sqrt{(z-zz)} = \frac{1}{2}\pi,$$

postquam in integrali positum est $z=1$. At

$$\int \frac{a\,dz + xz\,dz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}},$$

si post integrationem ponatur $z=1$, dat

$$\sqrt{a} + \frac{a+x}{2\sqrt{x}} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$$

denotante $A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ arcum circuli radii $=1$, cuius sinus est $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Quocirca erit

$$\frac{\pi s}{\sqrt{x}} = 4n\sqrt{a} + n\pi\sqrt{x} - 2n\sqrt{a} - \frac{n(a+x)}{\sqrt{x}} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$$

hincque

$$s = nx + \frac{2n\sqrt{ax}}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}.$$

Huius aequationis differentialis est

$$ds = ndx - \frac{ndx}{\pi} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x} = \frac{sdx + nadx}{a+x} - \frac{2ndx\sqrt{ax}}{\pi(a+x)}.$$

Curva haec autem non ultra datam altitudinem poterit ascendere, ut in F usque, ubi erit $ds=dx$. Posito igitur $ds=dx$ erit

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}.$$

Fiat ergo ut $n:n-1$ ita semiperipheria circuli, cuius radius est 1, ad arcum eiusdem circuli, cuius cosinus sit m; erit $\frac{a-x}{a+x}=m$ atque $x=\frac{a(1-m)}{1+m}$. Ut si fuerit angulus DAB 60^0, erit $n=2$ et $m=0$ ideoque $BE=a=AD$. Ex quo sequitur, si angulus DAB fuerit maior quam 60^0, fore $x>a$, at si ille angulus minor fuerit quam 60^0, fore $x<a$. Ceterum ex aequatione differentiali apparet, ut iam notavimus, in puncto B fore $ds=ndx$, tum vero perpetuo fieri $ds<ndx$ usque in F, ubi est $ds=dx$.

COROLLARIUM 3

440. Si linea recta BNA fuerit horizontalis, erit $n=\infty$ et $a=0$. Si autem fit $n\sqrt{a}=\sqrt{f}$, erit

$$ds=\frac{s\,dx}{x}-\frac{2\,dx\sqrt{fx}}{\pi x}$$

ex aequatione differentiali inventa, cuius integrale est

$$\frac{s}{x}=\frac{-2}{\pi}\int\frac{dx\sqrt{f}}{x\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{f}}{\pi\sqrt{x}}$$

ideoque

$$s=\frac{4}{\pi}\sqrt{fx}.$$

Curva ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curvae datae locum tenet.

COROLLARIUM 4

441. Si aequatio differentialis

$$ds=n\,dx-\frac{n\,dx}{\pi}A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$$

denuo differentietur posito dx constante, prodibit

$$dds=\frac{-n\,a\,dx^2}{\pi(a+x)\sqrt{ax}}.$$

Ex qua aequatione sequitur curvae in B radium osculi fore infinite parvum.

SCHOLION 4

442. Ex aequatione generali differentiali

$$ds=\frac{-dx}{\pi}\left(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x}+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\beta x\sqrt{x}+\text{etc.}\right)-\frac{dx}{2}\left(\zeta+\frac{3}{2}\eta x+\text{etc.}\right)$$

sequitur semper fore $dds=\infty$ posito $x=0$.
non fuerit $\alpha=0$, radius osculi curvae qua
$\alpha=0$, tum radius osculi curvae BMF in

$$=\frac{\zeta^2}{3\eta}\sqrt{\left(\frac{\zeta^2}{4}\right.} -$$

Ex quo in quovis exemplo proposito sta
B innotescit.

EXEMPLUM 3

443. Si curva data ANB hanc habuerit aequationem, ut sit

$$dt = Cu^n du,$$

erit tempus per NA

$$= \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}.$$

Ponatur $a+b=f$ et $f-u=r^2$; erit $u=f-r^2$ et

$$u^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} r^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} f^{n-2} r^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} r^6 + \text{etc.}$$

Cum vero sit

$$\frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}} = -2dr,$$

erit

$$\int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}$$

$$= \text{Const.} - 2C\left(f^n r - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} r^3 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} r^5 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} r^7 + \text{etc.}\right).$$

Quia autem haec quantitas evanescere debet facto $u=0$ seu $r=\sqrt{f}$, erit quantitas illa constans addenda

$$= 2Cf^{n+\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \text{etc.}\right).$$

Ponatur nunc $u=a$ seu $r=\sqrt{b}$ atque loco seriei

$$1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \text{etc.}$$

ponatur N; prodibit totum descensus per BNA tempus

$$= 2CNf^{n+\frac{1}{2}}$$

$$- 2C\left(f^n \sqrt{b} - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} b\sqrt{b} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} b^2 \sqrt{b} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} b^3 \sqrt{b} + \text{etc.}\right).$$

Restituatur $a+b$ loco f et orietur hoc tempus

$$=2CN\left\{\begin{aligned}&a^{n+\frac{1}{2}}+\frac{(2n+1)}{2}a^{n-\frac{1}{2}}b+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}a^{n-\frac{3}{2}}b^2\\&\quad+\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6}a^{n-\frac{5}{2}}b^3+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

$$-2C\left\{\begin{aligned}&a^n\sqrt{b}+\frac{2n}{1\cdot 3}a^{n-1}b\sqrt{b}+\frac{2n(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5}a^{n-2}b^2\sqrt{b}\\&\quad+\frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}a^{n-3}b^3\sqrt{b}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Haec igitur series cum serie assumta hoc tempus exprimente comparata dat

$$k=2CNa^{n+\frac{1}{2}},\quad \alpha=\frac{2n+1}{2}2CNa^{n-\frac{1}{2}},\quad \beta=\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}2CNa^{n-\frac{3}{2}},$$

$$\gamma=\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6}2CNa^{n-\frac{5}{2}}\text{ etc.},$$

$$\zeta=-2Ca^n,\quad \eta=\frac{-2n}{1\cdot 3}2Ca^{n-1},\quad \theta=\frac{-2n(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5}2Ca^{n-2}\text{ etc.}$$

Hinc oritur

$$ds=\frac{-2CNa^n dx}{\pi}\left\{\begin{aligned}&\frac{(2n+1)\sqrt{x}}{1\cdot\sqrt{a}}+\frac{(2n+1)(2n-1)x\sqrt{x}}{1\cdot 3\cdot a\sqrt{a}}\\&+\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2\sqrt{x}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot a^2\sqrt{a}}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

$$+Ca^n dx\left(1+\frac{nx}{1.a}+\frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2\cdot a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3}+\text{etc.}\right).$$

Huius vero seriei posterioris summa est $Cdx(a+x)^n$ huiusque integralis

$$\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}.$$

Quare post integrationem habebitur

$$s=\frac{C(a+x)^{n+1}-Ca^{n+1}}{n+1}$$

$$-\frac{4CNa^n\sqrt{x}}{\pi\sqrt{a}}\left(\frac{(2n+1)x}{3}+\frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3\cdot 5\cdot a}+\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot a^2}+\text{etc.}\right).$$

Quae est aequatio pro curva quaesita BMF, quae toties ex terminorum numero finito constat, quoties n fuerit terminus huius seriei $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ etc. Est vero

$$N = \int dp\,(1-pp)^n,$$

si post integrationem ponatur $p = 1$. Hacque facta substitutione est

$$\int dp\,(1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\int dp\,(1-pp)^n.$$

Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, quia est

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{\pi}{2},$$

erit $N = \frac{\pi}{2}$; si $n = \frac{1}{2}$, erit $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$, erit $N = \frac{3\cdot\pi}{4\cdot 4}$; si $n = \frac{5}{2}$, erit $N = \frac{3\cdot 5\cdot \pi}{4\cdot 6\cdot 4}$; si $n = \frac{7}{2}$, erit $N = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \pi}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}$ etc. At quia, si $n = 0$, est $N = 1$, erit, si $n = 1$, $N = \frac{2}{3}$; si $n = 2$, erit $N = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$; si $n = 3$, erit $N = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}$ etc. Ut si curva fuerit cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ ideoque erit

$$s = 2C\sqrt{(a+x)} - 2C\sqrt{a},$$

ut supra invenimus (§ 438).

SCHOLION 5

444. Quando igitur est $dt = Cu^n du$, hic valor pro s invenitur atque ex ipsa methodi natura intelligitur, si dt aequetur aggregato aliquot huiusmodi terminorum, tum s aequalem fore aggregato seriorum a singulis terminis productarum. Hac igitur ratione, si curva data fuerit quaecunque, series est quaerenda terminorum huius formae $Cu^n du$ ipsi dt aequalis. Atque ex iis omnibus debitus ipsius s valor obtinebitur. Ut si fuerit natura lineae datae ANB haec

$$dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{c}},$$

primus terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$, unde fit

$$s = 2\sqrt{c(a+x)} - 2\sqrt{ac};$$

alter terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$ et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$, unde oritur

$$s = \frac{2(a+x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}.$$

Curva quaesita ergo sequente aequatione exprimetur

$$s = \frac{2(a+3c+x)\sqrt{(a+x)} - 2(a+3c)\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}.$$

EXEMPLUM 4

445. Sit curva data circulus diametri c; erit

$$dt = \frac{\frac{1}{2}c\,du}{\sqrt{(cu-u^2)}} = \frac{1}{2}c\,du\left(\frac{1}{\sqrt{cu}} + \frac{1\cdot\sqrt{u}}{2\cdot c\sqrt{c}} + \frac{1\cdot 3\cdot u\sqrt{u}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right).$$

Sumto nunc quolibet termino seorsim et inveniatur valor ipsius ds; habebitur colligendis omnibus

$$ds = \frac{c\,dx}{2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \dfrac{1\cdot\sqrt{(a+x)}}{2\cdot c\sqrt{c}} + \dfrac{1\cdot 3\cdot (a+x)^{\frac{3}{2}}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}}\ \text{etc.} \\ -\dfrac{1\cdot\sqrt{x}}{2\cdot c\sqrt{c}} - \dfrac{1\cdot 3\cdot x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} - \dfrac{3\cdot 1\cdot 3\cdot a\sqrt{x}}{2\cdot 2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}}\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Ex quibus sequens aequatio nascitur

$$\begin{aligned} \frac{2\,ds}{c\,dx} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)(c-a-x)}} &- \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}}\right) \\ &- \frac{a}{1\cdot dx}d\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1\cdot\sqrt{x}}{\ldots}\right) \\ &- \frac{a^2}{1\cdot 2\cdot dx^2}dd\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} \ldots\right. \\ &- \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}d^3\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1\cdot\sqrt{x}}{2\cdot c\sqrt{c}} - \ldots\right. \end{aligned}$$

Quae expressio in multas alias formas tra[...]

PROPOSITIO 51

PROBLEMA

446. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis si detur curva quaecunque AM* (Fig. 55), *invenire curvam AN eiusmodi, ut oscillationes, quae peraguntur super curva composita MAN, sint omnes inter se isochronae.*[1])

SOLUTIO

Sit datae curvae AM abscissa $AP = u$, arcus respondens $AM = t$; dabitur ob curvam datam aequatio inter u et t. Deinde in curva quaesita AN

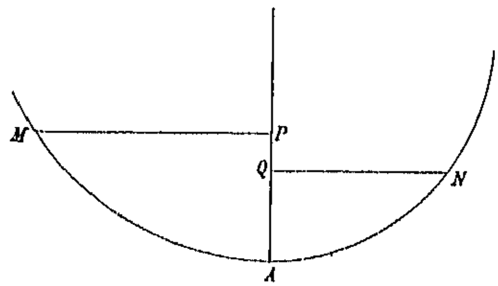


Fig. 55.

ponatur abscissa $AQ = x$ et arcus $AN = s$. Iam in oscillatione quacunque sit celeritas in puncto A debita altitudini b eritque tempus per MAN

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(b-u)}} + \int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}.$$

Atque si in hac expressione ponatur $u = b$ et $x = b$, prodibit tempus unius semioscillationis; quod cum debeat esse constans, ex formula id exprimente littera b prorsus evanescere debet. Ponatur

$$dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}} + Pdu \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{x}} - Qdx$$

eritque tempus unius semioscillationis

$$= \int \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}} + \int \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{(bx-x^2)}} + \int \frac{Pdu}{\sqrt{(b-u)}} - \int \frac{Qdx}{\sqrt{(b-x)}},$$

1) Vide L. EULERI Commentationem 12 (indicis ENESTROEMIANI): *De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 49; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

postquam positum est $u=b$ et $x=b$. Huius autem expressionis duo priores termini iam ita sunt comparati, ut b ex iis evanescat facto $u=b$ et $x=b$; dant nimirum $\pi\sqrt{f}+\pi\sqrt{h}$ denotante π peripheriam circuli diametri $=1$. Quare si posteriores termini ita fuerint comparati, ut sese destruant facto $u=b$ et $x=b$, habebitur id, quod quaeritur; at P et Q tales necesse est sint quantitates, quae b non involvant, quia in aequationes curvarum ingrediuntur. At erit

$$\int\frac{P\,du}{\sqrt{(b-u)}}-\int\frac{Q\,dx}{\sqrt{(b-x)}}=0$$

facto $u=b$ et $x=b$, si Q talis fuerit functio ipsius x, qualis P est ipsius u. Seu, cum nihil impediat, quo minus poni possit $x=u$, fiat $x=u$ oportebitque esse $Q=P$. Datur vero P ex aequatione curvae AM datae, quippe est

$$P=\frac{dt}{du}-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}.$$

Quocirca pro curva quaesita haec habebitur aequatio

$$ds=\frac{du\sqrt{h}}{\sqrt{u}}-dt+\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$$

seu

$$s+t=2\sqrt{hu}+2\sqrt{fu};$$

ex qua aequatione determinatur natura curvae quaesitae AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

447. Sumta igitur $AP=u=x$ (Fig. 56), cum sit $AM=t$ et $AN=s$, erit

$$NA+MA=t+s=2\left(\sqrt{f}+\sqrt{h}\right)\sqrt{AP},$$

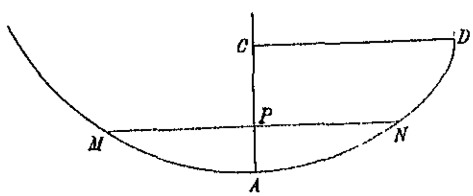


Fig. 56.

seu summa arcuum eidem abscissae respondentium proportionalis est radici quadratae ex abscissa AP.

COROLLARIUM 2

448. Curva igitur quaesita AND ita debet esse comparata, ut summa arcuum $AM + AN$ aequalis sit arcui cycloidis eidem abscissae AP respondentis. Ex qua proprietate sponte fluit omnes oscillationes esse isochronas.

COROLLARIUM 3

449. Tempus ergo unius oscillationis aequatur tempori descensus super cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est $2(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2$. Seu pendulum huius longitudinis producet semioscillationes minimas isochronas oscillationibus super curva MAN. Pendulum vero longitudinis $\frac{1}{2}(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2$ peraget totas oscillationes isochronas.

COROLLARIUM 4

450. Quia quantitatem h pro lubitu accipere licet, infinitae curvae AND satisfaciunt; atque etiam ea poterit determinari, ut tempus oscillationis sit datae quantitatis. Ut si una oscillatio isochrona esse debeat oscillationi penduli longitudinis $\frac{L}{4}$, erit

$$L = 2(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2 \quad \text{ideoque} \quad \sqrt{h} = \sqrt{\frac{L}{2}} - \sqrt{f}.$$

Quare L maius esse debet quam $2f$.

COROLLARIUM 5

451. Si data curva AM fuerit cyclois seu $dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$, altera curva AN erit quoque cyclois quaecunque; fit enim $ds = \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{x}}$. Atque super duabus huiusmodi cycloidibus non solum integrae oscillationes erunt isochronae, sed etiam singuli ascensus et descensus super qualibet cycloide absolventur eodem tempore.

EXEMPLUM 1

452. Sit curva data AM recta utcunque ad horizontem inclinata, ut sit $dt = n\,du$; prodibit pro curva quaesita posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f}+\sqrt{h}$ haec aequatio

$$ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - n\,du = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - n\,dx.$$

Quare si vocetur $PN=y$, erit

$$dy=dx\sqrt{\left(\frac{L}{2x}-\frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2x}}+n^2-1\right)},$$

ubi $\frac{L}{4}$ denotat longitudinem penduli isochroni; ex qua aequatione curva quaesita poterit construi. Curva autem in D habebit punctum reversionis ibique tangentem verticalem, quod habebitur sumendo $AC=\frac{L}{2(n+1)^2}$. Curvae vero in infimo loco A radius osculi est $=L$.

Hic praeterea notandum est, si $n=1$, quo casu linea AM fit recta verticalis in AC incidens, fore curvam quaesitam algebraicam; erit namque

$$dy=\frac{dx\sqrt{(L-2\sqrt{2Lx})}}{\sqrt{2x}},$$

cuius integralis est

$$y=\frac{L}{3}-\frac{(\sqrt{L}-2\sqrt{2x})\sqrt{(L-2\sqrt{2Lx})}}{3}$$

seu

$$9y^2-6Ly=-6L\sqrt{2Lx}+24Lx-16x\sqrt{2Lx},$$

quae ab irrationalitate prorsus liberata fit quatuor dimensionum. Huius curvae cuspis D habebitur sumendo $AC=\frac{1}{8}L$, quo casu fit $CD=\frac{L}{8}$.

EXEMPLUM 2

453. Sit curva data AM circulus radii a; erit

$$dt=\frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}}.$$

Hinc posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f}+\sqrt{h}$ erit

$$ds=\frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}}-\frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}}=\frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}}-\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}.$$

Ex qua aequatione sequitur

$$dy=dx\sqrt{\left(\frac{L}{2x}-\frac{2a\sqrt{L}}{x\sqrt{(4a-2x)}}+\frac{a^2}{2ax-xx}-1\right)}.$$

Cuspis curvae AND erit, ubi est

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

seu

$$4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 + 24a^2x^2$$
$$- 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8a^3L + 4a^4 = 0.$$

Ponatur $L = a$; fiet

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x - 8a^3 = 0.$$

At si $L = 2a$, erit

$$x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 = 0,$$

unde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo penduli isochroni est $\frac{a}{2}$.[1])

SCHOLION

454. Si igitur efficiatur, ut pendulum in huiusmodi curva composita oscillationes peragat, eius oscillationes aeque erunt isochronae, ac si in cycloide moveretur. Atque hanc ob rem quaecunque curva ad tautochronismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio ista quaestio, quemadmodum curvam datam comparatam esse oporteat, ut inventa cum data unam curvam continuam constituat, id quod sequente propositione praestabimus.

---

1) Ex aequatione

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

sequitur

$$4x^4 - 4Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 + 16aLx^2 + 24a^2x^2$$
$$- 4aL^2x - 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8a^3L + 4a^4 = 0.$$

Posito $L = a$ fit

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 20ax^2 + 41a^2x - 32a^3 = 0;$$

at si $L = 2a$, erit

$$x^4 - 6ax^3 + 15a^2x^2 - 14a^3x + a^4 = 0,$$

unde concluditur valorem $x = a$ problemati non satisfacere. P. St.

PROPOSITIO 52

PROBLEMA

455. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis invenire curvam continuam MAN, super qua omnes semioscillationes absolvantur aequalibus temporibus.*[1])

SOLUTIO

Sit igitur curva MAN (Fig. 56, p. 207) curva continua in eaque $AP = x$ et $AM = t$ et $AN = s$. Assumatur nova indeterminata z atque x et t ita dentur in z, ut posita z affirmativa prodeat curvae pars AM, at posita z negativa prodeat curvae pars AN. Quia nunc pro utraque parte x eundem obtinet valorem, debebit x talis esse functio ipsius z, quae eadem maneat, sive z affirmative sumatur sive negative, seu x debet esse functio par ipsius z. Deinde t eiusmodi esse debet functio ipsius z, ut prodeat s, si ponatur $-z$ loco z. At quia arcus s in alteram partem axis cadit, eius valor erit negativus respectu curvae AM; quare, si in valore ipsius t ponatur $-z$ loco z, prodire debet $-s$. Sit nunc R functio impar ipsius z et S eius functio par et ponatur $t = R + S$; fiet $-s = -R + S$ seu $s = R - S$; unde fit $t + s = 2R$. Sit longitudo penduli isochroni $= a$; quia est $\sqrt{2a} = \sqrt{f} + \sqrt{h}$, debebit esse $t + s = 2\sqrt{2ax}$ hincque erit $R = \sqrt{2ax}$ et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quia autem x debet esse functio par ipsius z, ex hac expressione id per se obtinetur; cum enim R sit functio impar, eius quadratum erit functio par. Sit igitur $R = z$; erit $z = \sqrt{2ax}$ atque S debebit esse functio par ipsius $\sqrt{2ax}$ seu ipsius $\sqrt{x}$. Quo facto habebitur ista aequatio

$$s = \sqrt{2ax} - S$$

pro omnibus curvis continuis tautochronis. Sit $dS = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$; erit T functio impar quaecunque ipsius $\sqrt{x}$. Quapropter fiet

$$ds = \frac{adx - Tdx}{\sqrt{2ax}}$$

1) Vide L. Euleri Commentationem 12 (indicis Enestroemiani): *De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 49, vide praecipue p. 60; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

atque

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$$

posito $PN = y$. Ex qua aequatione infinitae curvae tautochronae continuae reperiuntur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

456. Curva igitur hoc modo inventa AN est tautochrona cum sui ipsius parte continua AM. Dantur vero per praecedens problema infinitae aliae curvae AM, quae cum AN coniunctae oscillationes isochronas producunt.

COROLLARIUM 2

457. Per praecedentem propositionem omnis curva AM, cuius haec est aequatio

$$t = \sqrt{2cx} + S \quad \text{seu} \quad dt = \frac{cdx}{\sqrt{2cx}} + \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}},$$

oscillationes isochronas cum curva AN producit. At harum oscillationum longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

COROLLARIUM 3

458. Inter has ergo infinitas curvas AM cum AN oscillationes isochronas producentes ea est continua cum AN, in quae est $c = a$. Atque longitudo penduli isochroni fit $= a$, ut assumsimus.

COROLLARIUM 4

459. Si ponatur $c = 0$, erit cum curva AN quoque tautochrona haec curva AM, cuius aequatio est

$$dt = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$$

seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est $\frac{a}{4}$. Quoties ergo est $T = \sqrt{2bx}$, toties quoque linea recta cum AN tautochronismum producit, si ita fuerit inclinata, ut anguli MAP secans sit $\sqrt{\frac{b}{a}}$ seu cosinus $= \sqrt{\frac{a}{b}}$.

COROLLARIUM 5

460. Quia curva AN in puncto A ad axem AP normalis esse debet, oportet, ut T evanescat posito $x=0$. Idem etiam sequitur ex eo, quod $a-T$ debeat esse quantitas affirmativa, saltem in initio A. Si enim T fieret infinitum posito $x=0$, id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen, ut S evanescat posito $x=0$, curva AN in alteram axis AP partem caderet curvaque in A haberet cuspidem et corpus, postquam super MA descendit, per reflexionem super AN ascenderet, quod esset contra naturam oscillationum.

COROLLARIUM 6

461. Si igitur T evanescit posito $x=0$, radius osculi in A, qui est $\frac{sds}{dx}$, ob $s=y$ in hoc loco erit $=a$ ideoque oscillationes congruent cum oscillationibus minimis penduli longitudinis a, ut assumsimus.

COROLLARIUM 7

462. Curvae portio AN habebit in D tangentem verticalem ibique cuspidem; quod punctum invenitur ex hac aequatione

$$a-T=\sqrt{2ax}$$

sumendo $AC=$ valori ipsius x ex hac aequatione. Altera quoque pars AM habebit cuspidem, si alicubi fuerit

$$a+T=\sqrt{2ax}.$$

COROLLARIUM 8

463. Si fuerit $S=0$ et $T=0$, erit $s=\sqrt{2ax}$. Quare curva erit cyclois atque portio AN aequalis et similis curvae AM. Est ergo cyclois curva continua, super qua omnes oscillationes absolvuntur eodem tempore.

EXEMPLUM

464. Sit $T=\sqrt{2bx}$, quo casu curva AN quoque est tautochrona cum recta AC angulum constituente, cuius cosinus est $\sqrt{\frac{a}{b}}$; erit

$$ds=\frac{adx-dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}} \quad \text{atque} \quad s=\sqrt{2ax}-\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Habebitur autem

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2a\sqrt{2bx} + 2bx - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}.$$

Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in propositione praecedente pro curva invenimus, quae cum recta tautochronam constituat (§ 452), si modo scribatur L pro a et n pro $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Quare si fuerit $b = a$, curva quoque algebraica invenitur NAM, quae est tautochrona, cuius aequatio est

$$dy = dx\sqrt{\frac{a - 2\sqrt{2ax}}{2x}}$$

et integralis haec

$$3y = a - (\sqrt{a} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(a - 2\sqrt{2ax})}.$$

Quae est ea ipsa curva, quae cum recta verticali tautochronam constituit, ut supra invenimus (§ 452). Longitudo vero penduli isochroni est $= a$, si corpus in hac curva oscilletur. At si moveatur super recta AC et parte curvae AN, longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fuerit cuspis curvae, erit $AC = \frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascendit. Praeter hanc curvam tautochronam algebraicam aliae vix inveniri poterunt.

CAPUT TERTIUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE

PROPOSITIO 53

PROBLEMA

465. *Si corpus sollicitetur deorsum a potentia uniformi g in medio quocunque resistente, determinare motum corporis descendentis super data curva AM* (Fig. 57) *et pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.*

SOLUTIO

Ponatur in verticali AP abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$ sitque altitudo celeritati corporis in M debita $= v$ et resistentia in $M = R$. Manifestum iam est ex capite praecedente [§ 93], si nulla esset resistentia, fore

$$dv = gdx.$$

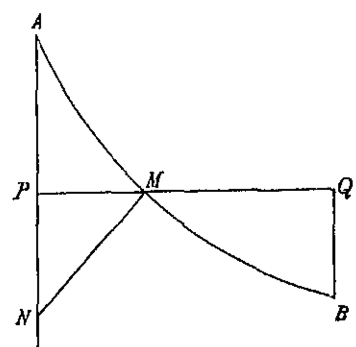


Fig. 57.

Resistentia vero minuit hoc celeritatis incrementum et aequipollet vi tangentiali $= R$; eiusque solius effectus in hoc consisteret, ut foret

$$dv = -Rds.$$

Quamobrem si et potentia sollicitans g et resistentia R ambae simul in corpus agunt, erit

$$dv = gdx - Rds,$$

ex qua aequatione celeritas corporis in quovis puncto M est eruenda. Atque si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita est instituenda, ut facto $x=0$ prodeat quoque $v=0$. Verum si data cum celeritate corpus in A descensum inceperit, in integratione effici debet, ut posito $x=0$ fiat v aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum autem inventa fuerit celeritas corporis, habebitur simul tempus, quo quivis arcus AM absolvitur, sumendo $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Quod ad pressionem, quam curva in M sustinet, spectat, curva in M duplici vi premitur, vi centrifuga scilicet et vi normali. Ponamus curvam esse convexam deorsum et elementum dx constans; erit longitudo radii osculi in contrariam partem normalis MN directi

$$=\frac{ds^3}{dxddy},$$

unde vis centrifuga erit

$$=\frac{2vdxddy}{ds^3},$$

qua curva secundum directionem MN premitur. Secundum eandem vero directionem curva premetur a vi normali, quae est

$$=\frac{gdy}{ds};$$

vis normalis enim a potentia absoluta g tantum oritur, quia directio vis resistentiae est in tangente sita ideoque nullam vim normalem generat. Consequenter tota vis, qua curva in M secundum directionem normalis MN premitur, est

$$=\frac{gdy}{ds}+\frac{2vdxddy}{ds^3}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

466. Expressio ergo vis curvam prementis congruit cum ea, quam in vacuo invenimus [§ 83]. Neque tamen curva in medio resistente eadem vi premitur qua in vacuo ob celeritatem, a qua vis centrifuga pendet, quae a medio resistente variatur.

COROLLARIUM 2

467. In isto descensu corpus non ut in vacuo maximam habet celeritatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis, sed posito $dv=0$ locus,

in quo corpus maximam habet celeritatem, invenitur ex hac aequatione

$$gdx = Rds \quad \text{seu} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{R}{g}$$

in eo puncto, ubi sinus anguli, quem tangens curvae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum ut potentia absoluta g ad resistentiam R in eo loco.

COROLLARIUM 3

468. Celeritas corporis igitur augetur usque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; ultra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, quia tum Rds excedit gdx et hanc ob rem fit dv negativum.

COROLLARIUM 4

469. Si resistentia fuerit ut potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit uniforme, cuius exponens sit k, ubi k est altitudo celeritati debita, quacum corpus movetur, resistentiam patitur vi gravitati aequalem; hoc ergo casu erit

$$R = \frac{v^m}{k^m}$$

atque ista habebitur aequatio ad motum definiendum

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

COROLLARIUM 5

470. Sin autem abscissae in axe BQ capiantur fueritque $BQ = x$, $QM = y$ et $BM = s$, propter harum quantitatum differentialia negativa respectu priorum habebitur

$$dv = -gdx + Rds.$$

Quae aequatio ita est integranda, ut posito $x = 0$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curva sustinet, est

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}.$$

COROLLARIUM 6

471. Si medium fuerit uniforme, cuius exponens sit k, resistentia vero functioni cuicunque ipsius v, quae sit V, proportionalis, sumatur K talis functio ipsius k, qualis V est ipsius v; erit resistentia $R = \frac{V}{K}$ ideoque habebitur ista aequatio

$$dv = -g\,dx + \frac{V\,ds}{K}$$

sumto axe BQ.

SCHOLION 1

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis exhibentem dedi pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox hac mox illa utemur. Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto ut A, utemur priore formula AP pro axe sumente. At si in eadem curva plures descensus ad punctum fixum usque B sint considerandi, ut in motu oscillatorio usu venit, posteriore formula utemur, in qua BQ pro axe habetur.

SCHOLION 2

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data curva determinari debet, ita est comparata, ut indeterminatae paucis casibus a se invicem separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum spectat, concludi licet. Quamobrem eos tantum casus evolvere convenit, quibus aequatio

$$dv = \pm g\,dx \mp \frac{V\,ds}{K}$$

vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omnino ad tres casus generales reducentur. Primus est, quando linea, super qua corpus movetur, est recta; tum enim ob $ds = n\,dx$ aequatio transit in hanc

$$\frac{\pm K\,dv}{gK - nV} = dx,$$

in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. Secundus casus est, quando in V unicam tantum obtinet dimensionem v; tum enim aequatio integrationem admittit Tertius casus est, quando tam v quam aequatio pro

curva ita est comparata, ut in aequatione v et x ubique eundem dimensionum numerum constituant; tum enim per regulam notam BERNOULLIANAM[1]) indeterminatae a se invicem possunt separari. Hoc autem evenit, si in Vds unica fuerit dimensio ipsarum v et x. Praeter hos quidem casus essent duo alii integrationem admittentes, sed qui huc non pertinent. Primus est, si resistentia evanescit, qui vero casus in praecedente capite iam sufficienter est pertractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans g evanescit; de quo autem non est opus, ut agamus, quia motus super quacunque linea congruit cum motu super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dictum. Praeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fuerit $V = v^2$, quoties scilicet aequatio pro curva ita est comparata, ut aequatio ad casum aequationis, quam quondam Com. RICCATI proposuit, potest reduci. Generaliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi atque finita expressione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis RICCATIANAE dedi constructionem.[2]) Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres casus expositos subinde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato celeritatis est proportionalis, evolvemus.

SCHOLION 3

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est difficilis et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, ut capite praecedente fecimus, eam accommodabimus, sed nobis perpetuo potentia sollicitans erit uniformis et deorsum directa neque de viribus centripetis multum erimus solliciti. Atque cum potentia sollicitans ponatur uniformis, medium resistens quoque tale poni conveniet; fluidum enim, quod resistentiam generat, ipsam corporis gravitatem minuit, et si id non esset uniforme, potentia absoluta non recte uniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem curvam, in qua corpus movetur, totam in eodem plano positam assumemus, quo multas difficultates nullam utilitatem afferentes removeamus.

---

1) IOH. BERNOULLI, *De integrationibus aequationum differentialium, ubi traditur methodi alicuius specimen integrandi sine praevia separatione indeterminatarum,* Comment. acad. sc. Petrop. 1 (1726), 1728, p. 167; *Opera omnia* Tom. 3, Lausannae et Genevae 1742, p. 108. P. St.

2) Vide notam p. 196. P. St.

PROPOSITIO 54

PROBLEMA

475. *Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potentia uniformi g in medio quocunque resistente, determinare motum corporis super data curva AM* (Fig. 58) *ascendentis et pressionem, quam curva in singulis punctis M patitur.*

SOLUTIO

In verticali AP posita abscissa $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ sit altitudo celeritati in A debita $= b$ eique in M debita $= v$ atque resistentia in $M = R$. Erit igitur, dum corpus ascendit, tam potentia sollicitans g quam resistentia R motui contraria. Hanc ob rem erit simili modo quo in praecedente propositione

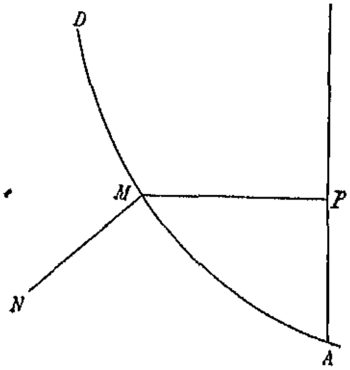


Fig. 58.

$$dv = -gdx - Rds.$$

Ex qua aequatione v ita debet determinari, ut facto $x = 0$ fiat $v = b$. Deinde cum resistentia in pressionem, quam curva patitur, non ingrediatur, erit ut supra pressio tota, quam curva in M secundum directionem normalis MN sustinet,

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$$

posito dx constante; ubi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem et $-\frac{2vdxddy}{ds^3}$ vim centrifugam, utramque iuxta MN directam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

476. In ascensu corporis ergo super quacunque curva celeritas corporis perpetuo imminuitur atque punctum curvae D reperietur, in quo corporis ascendentis celeritas evanescit, si in aequatione $dv = -gdx - Rds$ post integrationem ponatur $v = 0$.

COROLLARIUM 2

477. Si corpus super curva DMA descenderet, haberetur ista aequatio

$$dv = -gdx + Rds$$

(§ 470), ex qua intelligitur ascensum non esse similem descensui ut in vacuo. Sed si resistentia fieret negativa seu accelerans, tum ascensus similis foret descensui. Quare descensus in medio resistente congruet cum ascensu in medio tantundem accelerante et vicissim.

COROLLARIUM 3

478. Quoniam aequatio pro ascensu hoc tantum differt ab aequatione pro descensu, quod resistentia R valorem induat negativum, intelligitur iisdem casibus, quibus aequatio pro descensu separari vel integrari potest, iisdem quoque aequationem pro ascensu simili modo tractari posse.

COROLLARIUM 4

479. Si fuerit $R = \frac{V}{K}$, erit pro ascensu super curva AM haec aequatio

$$dv = -gdx - \frac{Vds}{K}.$$

At pro descensu habetur

$$dv = -gdx + \frac{Vds}{K}.$$

Quare si illa aequatio poterit integrari, simul quoque huius aequationis habebitur integrale ponendo tantum $-K$ loco K.

SCHOLION

480. Secundum tres igitur casus supra memoratos, quibus aequatio inventa vel separari vel integrari potest, tam descensum quam ascensum pertractabimus, si scilicet detur curva, super qua motus fieri ponitur. Deinde autem ex datis potentia sollicitante, resistentia et pressione curvam investigabimus. Tertio si motus quaedam proprietas fuerit proposita, curvam determinabimus, quae in data resistentiae hypothesi satisfaciat. Praeterea sequentur

alia problemata, in quibus harum quatuor rerum — resistentiae, motus, pressiones et curvae — duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habebimus deinceps quoque problemata indeterminata, quibus omnes curvae requiruntur, super quibus corpus descendens vel eandem celeritatem acquirit vel eas eodem tempore absolvit. Tum sequetur doctrina de lineis brachystochronis atque tandem caput concludet de motu oscillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55

PROBLEMA

481. *In medio resistente uniformi quocunque et hypothesi gravitatis uniformis g determinare motum corporis descendentis super linea recta AMB* (Fig. 59) *ad horizontem utcunque inclinata.*

SOLUTIO

Posita $AP = x$ erit $AM = s = nx$; et quia medium resistens est uniforme, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$. Posita ergo altitudine celeritati in M debita $= v$ erit

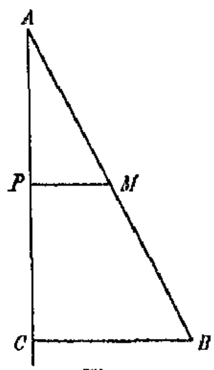


Fig. 59.

$$dv = gdx - \frac{nVdx}{K}$$

(§ 465). Unde fit

$$\frac{Kdv}{gK - nV} = dx,$$

in qua aequatione indeterminatae sunt a se invicem separatae; erit ergo

$$x = \int \frac{Kdv}{gK - nV},$$

in qua integratione efficiendum est, ut posito $x = 0$ fiat $v = 0$, si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Sin vero habeat celeritatem initialem, haec per integrationem est introducenda. Tempus per spatium AM est

$$= \int \frac{ndx}{\sqrt{v}}.$$

Posito ergo loco dx eius valore in v habebitur tempus per AM

$$= \int \frac{nKdv}{(gK - nV)\sqrt{v}},$$

quod integrale ita est sumendum, ut posita $\sqrt{v}=$ celeritati initiali in A evanescat. Pressio vero, quam linea in quovis puncto M sustinet, est constans, nempe aequalis vi normali

$$=\frac{g\,dy}{ds}=\frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n},$$

quia vis centrifuga evanescit ob $ddy=0$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

482. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK>nV$. At si semel fuerit $gK=nV$, corpus neque accelerabitur neque retardabitur. Diminuetur vero corporis celeritas, si in initio A fuerit $nV>gK$.

COROLLARIUM 2

483. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat, motus perpetuo crescet, ita tamen, ut semper sit $gK>nV$, quippe quae est ultima celeritas, quam descensu per infinitum spatium demum acquirit.

COROLLARIUM 3

484. Quo maior ergo est angulus BAC, eo minor est ultima, quam corpus acquirere potest, celeritas. Maximam vero celeritatem ultimam, qua aequabiliter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC.

COROLLARIUM 4

485. Si resistentia fuerit ut potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V=v^m$ et $K=k^m$, unde ista habebitur aequatio

$$x=\int\frac{k^m\,dv}{gk^m-nv^m}$$

atque tempus per AM

$$=\int\frac{nk^m\,dv}{(gk^m-nv^m)\sqrt{v}}.$$

EXEMPLUM 1

486. Resistat medium in simplici ratione celeritatum; erit $2m = 1$ atque

$$dv = g\,dx - \frac{n\,dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Hinc fit

$$x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$$

vel per seriem

$$x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v^2}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} + \text{etc.},$$

si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Tempus autem per spatium AM erit

$$= \int \frac{n\,dv\sqrt{k}}{g\sqrt{kv} - nv} = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}.$$

Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit

$$nx + 2\sqrt{kv} = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$$

atque in serie

$$t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}} + \text{etc.}$$

Si ergo corpus in descensu per AB acquisivit celeritatem altitudini b debitam, ex hac reperitur altitudo

$$AC = \frac{-2\sqrt{bk}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{b}}.$$

EXEMPLUM 2

487. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum; erit $m = 1$ et

$$x = \int \frac{k\,dv}{gk - nv} = \frac{k}{n}\, l \frac{gk}{gk - nv},$$

si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoaverit. Quare, si e sit numerus, cuius logarithmus est unitas, erit

$$e^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv} \quad \text{atque} \quad v = \frac{gk\left(e^{\frac{nx}{k}} - 1\right)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n}\left(1 - e^{\frac{-nx}{k}}\right).$$

Hanc ob rem, si corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit

$$AC = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nb}.$$

Atque si corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitudini $\frac{gk}{n}$ debitam. Tempus vero per spatium AM erit

$$= \int \frac{nkdv}{(gk - nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} \, l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}.$$

Per series tam spatium x quam tempus commode exprimitur; id quod generaliter pro quovis valore litterae m in sequente exemplo monstrabimus.

EXEMPLUM 3

488. Sit resistentia ut potestas exponentis $2m$ celeritatum; erit

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m};$$

quae expressio in seriem conversa dat

$$dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m} dv}{g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$$

Ex qua invenitur

$$x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{n^3 v^{3m+1}}{(3m+1)g^4 k^{3m}} + \text{etc.}$$

Atque si ponatur tempus per $AM = t$, quia est

$$dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}},$$

erit

$$t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m}\sqrt{}}{(4m+1)g^{}}$$

PROPOSITIO 56

PROBLEMA

489. *Resistat medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum datumque sit punctum A (Fig. 60), ex quo infinitae rectae AM sint eductae; determinare curvam CMD huiusmodi, ut corpus per quamlibet rectam AM descendens in puncto M eandem habeat celeritatem.*

SOLUTIO

Sit $2m$ exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, dicaturque $AP = x$ et $AM = z$ et ponatur $z = nx$. Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, quae debet esse constans, scilicet $= b$. Erit ergo

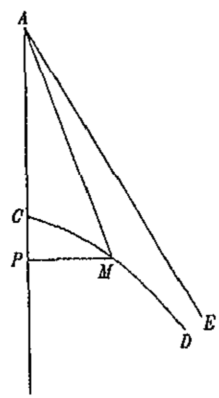


Fig. 60.

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$$

(§ 485) denotante ut supra k exponentem resistentiae et g potentiam sollicitantem deorsum tendentem. Ad naturam curvae CM ergo inveniendam oportet integrare aequationem

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m},$$

ita ut posito $v = 0$ fiat quoque $x = 0$, tum autem poni b loco v atque $\frac{z}{x}$ loco n, hocque modo obtinebitur aequatio inter x et z naturam curvae exponens. Per seriem autem supra aequationem propositam integravimus (§ 488), unde posito b loco v habebimus

$$x = \frac{b}{g} + \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} + \text{etc.}$$

Ponatur q^m loco n et multiplicetur ubique per q; quo facto habebimus

$$qx = \frac{bq}{g} + \frac{b^{m+1}q^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}q^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} + \text{etc.}$$

Sumantur differentialia et dividatur per bdq; habebitur

$$\frac{qdx+xdq}{bdq}=\frac{1}{g}+\frac{b^m q^m}{g^2k^m}+\frac{b^{2m}q^{2m}}{g^3k^{2m}}+\text{etc.}=\frac{k^m}{gk^m-b^mq^m}$$

seu

$$qdx+xdq=\frac{bk^mdq}{gk^m-b^mq^m}.$$

At quia est $q^m=n$ et $n=\frac{z}{x}$, ponatur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco q et prodibit

$$z^{\frac{1-m}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz+(m-1)z^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx=\frac{bk^mz^{\frac{1-m}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz-bk^mz^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx}{gk^mx-b^mz}.$$

Quae multiplicata per $x^{\frac{1}{m}}z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc

$$xdz+(m-1)zdx=\frac{bk^mxdz-bk^mzdx}{gk^mx-b^mz}.$$

Constructio autem curvae facilius sequitur ex aequatione

$$qx=\int\frac{bk^mdq}{gk^m-b^mq^m}.$$

Supra autem habuimus seriem ipsi qx aequalem, ex qua patet, si fuerit $q^m=\frac{gk^m}{b^m}$, tum $\frac{gx}{b}$ aequari seriei harmonicae

$$1+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m+1}+\text{etc.}$$

ideoque esse x infinitum. Si igitur x est infinitum, erit

$$q^m=\frac{z}{x}=\frac{gk^m}{b^m},$$

ex quo perspicitur rectam AE fore curvae asymtoton et cosinum anguli CAE fore $=\frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curvae C a puncto A distantia AC aequalis erit huic seriei

$$\frac{b}{g}+\frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}+\frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}+\text{etc.}$$

Debet autem esse necessario $b^m<gk^m$; alias enim vertex C a puncto A infinite distaret. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

490. Si applicata PM vocetur y, erit

$$z = \sqrt{(x^2+y^2)} \quad \text{et} \quad dz = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

quibus valoribus in aequatione inventa substitutis habebitur

$$xydy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^m y(xdy-ydx)}{gk^m x - b^m\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

COROLLARIUM 2

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$; transmutabitur ista aequatio in hanc

$$xpdp + mdx + mp^2dx = \frac{bk^m pdp}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}},$$

quae aequatio per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$ multiplicata fit integrabilis; habebitur enim

$$m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m pdp(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}},$$

quae expressio per quadraturas effici potest.

COROLLARIUM 3

492. Si resistentia evanescat corpusque in vacuo moveatur, fit k infinitum; atque ex supra data serie invenitur $qx = \frac{bq}{g}$ seu $x = \frac{b}{g}$, unde cognoscitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

SCHOLION 1

493. Quia autem ex hac aequatione generali parum ad cognitionem curvae potest concludi, in exemplis specialibus hanc disquisitionem ulterius prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in quibus formula $\frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$ integrationem saltem per logarithmos admittit, quo ad expressiones finitas perveniamus, ex quibus facile erit curvae naturam perspicere.[1])

1) Ex hac paragrapho concludi potest EULERO formulam COTESIANAM anno 1736 notam non fuisse. P. St.

EXEMPLUM 1

494. Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis; erit $m = \frac{1}{2}$. Ponatur $AC = a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debita esse debet altitudini b, erit

$$a = -2\sqrt{bk} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}$$

(§ 486). Deinde vero erit

$$\sqrt{q} = \frac{z}{x} \quad \text{seu} \quad q = \frac{z^2}{x^2}$$

atque

$$qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{bq}},$$

quod integrale ita est accipiendum, ut posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel eius valori assignato. Erit ergo

$$qx = -2\sqrt{bkq} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{bq}},$$

quae aequatio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc

$$z^2 = -2z\sqrt{bk} + 2gkxl\frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k} - z\sqrt{b}}.$$

Si $q = 1$, fit

$$x = a = -2\sqrt{bk} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}.$$

Fiat autem $q = 1 + dq$; habebitur

$$dx + xdq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}.$$

At quia $\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC, erit $\sqrt{dq}$ = sinui huius anguli. Quamobrem incrementum ipsius x infinities minus est quam incrementum anguli MAC incidente MA in CA, ex quo sequitur tangentem curvae in C esse horizontalem; huiusque curvae tangens in infinito seu asymtota erit AE existente anguli EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curva ex altera verticalis AC parte arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

SCHOLION 2

495. Generaliter quidem etiam ostendi potest curvae tangentem in C esse debere horizontalem. Posita enim $n=1$ in serie x exprimente habetur

$$AC=\frac{b}{g}+\frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}+\text{etc.}$$

Augeatur n elemento dn; habebitur incrementum momentaneum ipsius AC

$$=\frac{b^{m+1}dn}{(m+1)g^2k^m}+\frac{2b^{2m+1}ndn}{(2m+1)g^3k^{2m}}+\text{etc.}$$

Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC ideoque sinus $=\frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n}=\sqrt{2dn}$ posito $1+dn$ loco n. Quamobrem incrementum ipsius AC infinities est minus quam incrementum anguli; atque ideo AC normalis erit in curvam DMC.

EXEMPLUM 2

496. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis; erit $m=1$ positoque $AC=a$ erit

$$a=kl\frac{gk}{gk-b} \quad \text{atque} \quad b=gk\left(1-e^{\frac{-a}{k}}\right).$$

Deinde vero est

$$q=n=\frac{z}{x}$$

atque

$$qx=z=\int\frac{bkdq}{gk-bq}=kl\frac{gk}{gk-bq}=kl\frac{gkx}{gkx-bz}.$$

Habebitur ergo

$$e^{\frac{z}{k}}=\frac{gkx}{gkx-bz},$$

unde sequitur

$$x=\frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk\left(e^{\frac{z}{k}}-1\right)}=\frac{e^{\frac{z}{k}}z\left(e^{\frac{a}{k}}-1\right)}{e^{\frac{a}{k}}\left(e^{\frac{z}{k}}-1\right)}$$

posito loco b eius valore in a. Ad curvam autem construendam commodissime adhibetur haec aequatio

$$z=kl\frac{gk}{gk-bq},$$

in qua z est AM et q est secans anguli MAC.

SCHOLION 3

497. In solutione problematis ad inveniendam aequationem curvae CMD usi fuimus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem sine seriebus sequenti modo elicere licet. Quia est

$$x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m},$$

haec ipsa aequatio exprimit naturam curvae quaesitae, si post integrationem ponatur $v = b$ et $\frac{z}{x}$ loco n. Quamobrem si

$$\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$$

differentietur, posito non solum v, sed etiam n variabili, atque tum ponatur v constans $= b$ et $\frac{z}{x}$ loco n, habebitur aequatio differentialis pro curva quaesita. Ad hoc efficiendum pono $n = \frac{1}{p^m}$, quo prodeat

$$x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}.$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$$

sitque aequatio differentialis haec

$$dx = Pdv + Qdp,$$

si etiam p variabilis accipiatur. Quia autem P est functio nullius dimensionis ipsarum v et p, erit

$$x = Pv + Qp$$

ideoque

$$Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}.$$

Hoc igitur loco Q valore substituto prodibit

$$pdx = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m} + xdp.$$

Restituatur $n^{\frac{-1}{m}}$ loco p et orietur

$$mndx + xdn = \frac{mk^m ndv + k^m vdn}{gk^m - nv^m},$$

in qua aequatione n aeque variabilis est assumta ac v et x. Nunc ponatur $v=b$, $dv=0$ et $n=\frac{z}{x}$ atque habebitur ista aequatio

$$xdz+(m-1)zdx=\frac{bk^m(xdz-zdx)}{gk^mx-b^mz},$$

quae cum aequatione supra inventa congruit.

PROPOSITIO 57

PROBLEMA

498. *Si resistentia fuerit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, invenire curvam AMC* (Fig. 61) *huius proprietatis, ut corpus descendens super quavis subtensa AM dato tempore ex A ad M perveniat.*

SOLUTIO

Ducta verticali AC ponatur $AP=x$, $AM=z$ sitque $n=\frac{z}{x}$. Posita altitudine celeritati in M debita $=v$ et resistentia $=\frac{v^m}{k^m}$ sit tempus, quo corpus per AM descendit, $=t$, quod debet esse quantitas constans. Habebimus ergo ex praecedentibus

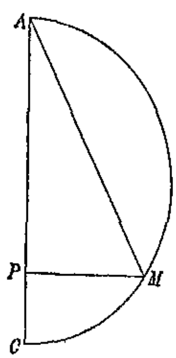


Fig. 61.

$$x=\int\frac{k^m dv}{gk^m-nv^m} \quad \text{et} \quad t=\int\frac{nk^m dv}{(gk^m-nv^m)\sqrt{v}}$$

(§ 485). Quocirca ad naturam curvae AMC inveniendam opus est, ut utraque aequatio, si fieri potest, re ipsa integretur et valor ipsius v ex altera aequatione in altera substituatur atque tum loco n scribatur $\frac{z}{x}$, quo facto habebitur aequatio inter x et z naturam curvae quaesitae exprimens. At si integrationes non commode perfici poterunt, utraque aequatio est differentianda ponendo quoque n variabili, et postquam positum est $dt=0$, ex duabus aequationibus inventis eliminari debet v, quo prodeat aequatio n et x tantum

continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curvae quaesitae. Ad hoc ponatur $n = \frac{1}{p^m}$, quo habeamus

$$x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m} \quad \text{et} \quad t = \int \frac{k^m dv}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}.$$

Quarum aequationum illius, sumto quoque p variabili, differentialis iam est inventa

$$pdx - xdp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m}$$

(§ 497). Ad alteram aequationem differentiandam pono

$$\frac{k^m}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} = P$$

sitque

$$dt = Pdv + Qdp.$$

Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m - \frac{1}{2}$, erit

$$\left(\frac{1}{2} - m\right)t = Pv + Qp$$

atque hinc

$$Q = \frac{(1-2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}.$$

Quo valore loco Q substituto prodibit

$$pdt = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} + \frac{(1-2m)tdp}{2}.$$

Sit nunc $t = 2\sqrt{c}$ atque $dt = 0$; habebimus

$$(2m-1)dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}.$$

Eliminetur ex his duabus aequationibus dv et proveniet

$$pdx - xdp = (2m-1)p^m dp\sqrt{cv}$$

seu

$$\sqrt{v} = \frac{pdx - xdp}{(2m-1)p^m dp\sqrt{c}} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-2}dp\sqrt{c}}$$

posito $x = rp$. Substituatur hic valor loco v in aequatione

$$(2m-1)dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$$

vel in hac

$$\frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{gk^m p^m - v^m}.$$

Casu quidem, quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis, erit $pdv = vdp$ seu $v = \alpha p$ et

$$p = \frac{x}{a} = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz},$$

unde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac resistentiae hypothesi curva AMC est circulus omnino ut in vacuo. In aliis hypothesibus, nisi re ipsa aequatio alterutra integretur, eliminata v habebitur aequatio differentio-differentialis inter z et x naturam curvae exprimens. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

499. Si ponatur $v = up$, erit

$$pdv - vdp = ppdu.$$

Atque hinc erit

$$\sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}}dp\sqrt{c}},$$

qui valor substitutus in aequatione

$$dr = \frac{k^m du}{gk^m - u^m}$$

dabit aequationem inter p et r, ex qua aequatio inter x et z formabitur.

COROLLARIUM 2

500. In medio ergo, quod resistit in simplici celeritatum ratione, apparet curvam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resistentiae hypothesi tempora descensuum per singulas circuli chordas ex puncto A ductas sunt inter se aequalia.

EXEMPLUM 1

501. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis; erit $m = 1$ atque

$$x = \frac{k}{n}\, l \frac{gk}{gk - nv}$$

seu

$$v = \frac{gk}{n}\left(1 - e^{\frac{-nx}{k}}\right).$$

Praeterea vero erit

$$t = 2\sqrt{c} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}\, l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$$

seu

$$e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}},$$

unde fit

$$v = \frac{gk\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1\right)^2}{n\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1\right)^2}.$$

Eliminata ergo v et $\frac{z}{x}$ posito loco n habebitur

$$\frac{e^{\frac{z}{k}} - 1}{e^{\frac{z}{k}}} = \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} + 1\right)^2}$$

seu

$$\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}} = l \frac{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-z}{k}}\right)}}{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-z}{k}}\right)}}.$$

In hac curva est

$$AC = kl \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + 1\right)^2}{4e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = 2kl \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2};$$

si igitur ponatur $AC = a$, erit

$$2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}},$$

unde erit

$$e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} = e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}$$

seu

$$\sqrt{\frac{gc}{k}} = l\left(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}\right).$$

Erit igitur

$$\sqrt{x}\, l\left(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}\right) = \sqrt{z}\, l\left(e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{z}{k}} - 1\right)}\right)$$

aequatio pro curva AMC. Si resistentia fuerit valde parva, erit k quantitas vehementer magna atque ideo

$$e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{z}{k}} - 1\right)} = 1 + \frac{z}{2k} + \sqrt{\left(\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2}\right)} = 1 + \sqrt{\frac{z}{k}} + \frac{z}{2k} + \frac{z\sqrt{z}}{4k\sqrt{k}}$$

huiusque logarithmus erit

$$= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} + \frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}.$$

Simili modo erit

$$l\left(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}\right) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}} + \frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}.$$

Atque hanc ob rem habebitur pro curva AMC haec aequatio

$$\sqrt{ax} + \frac{a\sqrt{ax}}{12k} = z + \frac{z^2}{12k}$$

seu

$$ax\left(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}\right) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}.$$

Unde perspicitur, si resistentia prorsus evanescat seu k fiat infinito magnum, fore $ax = z^2$ atque ideo curvam AMC circulum. At si medium rarissimum fuerit, erit

$$ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$$

et differentiando

$$adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2dz.$$

Si nunc fiat $zdz = xdx$, habebitur applicata PM maxima seu locus, ubi tangens curvae est verticalis, scilicet

$$a^2 + 6ak = 12kx + 3xz \quad \text{seu} \quad x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z},$$

unde fit

$$\frac{(6ak+a^2)^2}{3} = 24k^2z^2 + 10kz^3 + z^4,$$

ex qua aequatione ipsius z valor quam proxime est

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2}-5)a^2}{48k}$$

atque

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k} \quad \text{et} \quad PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}.$$

Curva ergo latissima est supra medietatem ibique latior est quam altitudo AC.

COROLLARIUM 3

502. Si igitur linea recta vel curva hanc curvam AMC in M tangat, ita ut tota extra spatium AMC sit sita, corpus ex A ad eam lineam citius perveniet descendendo super chorda AM quam super quavis alia recta ex A ad eam lineam ducta.

EXEMPLUM 2

503. Sit m numerus affirmativus et resistentia valde parva; erit k quantitas vehementer magna atque hinc

$$\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}.$$

Quocirca erit

$$x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} \quad \text{atque} \quad t = 2\sqrt{c} = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}$$

hincque prodit

$$v = gx - \frac{ng^m x^{m+1}}{(m+1)k^m} \quad \text{et} \quad \sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$$

atque

$$v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}}x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}.$$

His autem valoribus substitutis prodit ista aequatio

$$\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2g^{m-1}x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3g^{2m-2}x^{2m}}{(2m+2)k^{2m}}.$$

Quia vero est $n = \frac{z}{x}$, habebitur ista aequatio

$$\sqrt{gcx} = z + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-2}x^{2m-2}z^3}{(2m+2)k^{2m}}$$

seu

$$gcx = z^2 + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^3}{(m+1)(2m+1)k^m},$$

si medium est rarissimum. Unde patet, si resistentia penitus evanescat, fore $z^2 = gcx$ seu curvam AMC circulum diametri AC.

SCHOLION

504. Si igitur cognita fuerit curva AMC et detur linea quaecunque, determinari poterit recta AM, super qua corpus ex A celerrime ad datam lineam pertingat. Scilicet construenda est curva AMC, quae datam lineam tangat v. g. in M; eritque recta AM ea recta, super qua corpus descendendo ex A citissime ad lineam datam perveniat. Atque simili modo in praecedente problemate, si recta vel curva tangat curvam CMD (Fig. 60, p. 226) in M, corpus ex A descendendo per AM usque ad lineam tangentem curvam CMD maiorem acquiret celeritatem quam descendendo super quavis alia recta ex A ad eam lineam ducta. Ex his igitur solvi possunt problemata, quibus requiritur recta ex A ad datam lineam ducta, super qua corpus descendendo vel maximam acquirat celeritatem vel citissime ad eam lineam pertingat. Quamobrem hisce problematibus non diutius immorabimur, sed ad ascensum super lineis rectis considerandum progrediemur.

PROPOSITIO 58

PROBLEMA

505. *In hypothesi gravitatis uniformis g et medio quocunque resistente uniformi determinare motum corporis data cum celeritate initiali ex A* (Fig. 62, p. 239) *ascendentis super linea recta AB utcunque inclinata ad horizontem.*

SOLUTIO

Ducta horizontali AC et ex M ad eam perpendiculari MP vocetur $PM = x$ sitque $AM = nx$. Sit altitudo debita celeritati initiali in A $= b$

et altitudo debita celeritati in $M = v$; resistentia vero in M sit $= \frac{V}{K}$. His positis erit

$$dv = -g\,dx - \frac{nV\,dx}{K}$$

(§ 479), unde habetur

$$dx = \frac{-K\,dv}{gK + nV} \quad \text{atque} \quad x = \int \frac{-K\,dv}{gK + nV}$$

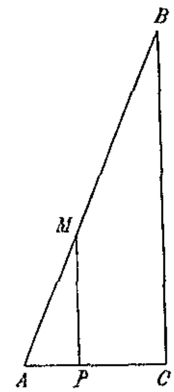


Fig. 62.

hoc integrali ita accepto, ut evanescat posito $v = b$. Si deinde ponatur $v = 0$, prodibit $x = BC$, ubi in puncto B corpus omnem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus per AM ascendit, est

$$= \int \frac{-nK\,dv}{(gK + nV)\sqrt{v}}$$

hoc integrali quoque ita accepto, ut evanescat posito $v = b$; in quo si porro ponatur $v = 0$, prodibit tempus totius ascensus per AMB. Pressio autem, quam linea AMB sustinet, ubique est constans et aequalis vi normali

$$= \frac{g\sqrt{(n^2 - 1)}}{n}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

506. Si linea AMB fit horizontalis, evanescente angulo BAC fiet $n = \infty$. Posito igitur $AM = z = nx$ erit

$$z = \int \frac{-K\,dv}{V}$$

et tempus, quo per AM progreditur, erit

$$= \int \frac{-K\,dv}{V\sqrt{v}}.$$

COROLLARIUM 2

507. Si resistentia fuerit ut potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ et $K = k^m$. Hoc ergo casu erit

$$x = \int \frac{-k^m\,dv}{gk^m + nv^m}$$

atque tempus per AM

$$= \int \frac{-nk^m dv}{(gk^m + nv^m)\sqrt{v}}.$$

COROLLARIUM 3

508. Utraque haec expressio in seriem conversa dat

$$x = \frac{b-v}{g} - \frac{n(b^{m+1} - v^{m+1})}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2(b^{2m+1} - v^{2m+1})}{(2m+1)g^3k^{2m}} - \text{etc.}$$

atque tempus per AM

$$= \frac{2n(\sqrt{b} - \sqrt{v})}{g} - \frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}} - v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}} - v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3k^{2m}} - \text{etc.}$$

Quamobrem posito $v = 0$ erit

$$BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} - \text{etc.}$$

atque tempus totius ascensus per AB

$$= \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g^3k^{2m}} - \text{etc.}$$

EXEMPLUM 1

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis; erit $m = \frac{1}{2}$ atque

$$x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}.$$

Hinc erit tota altitudo BC, ad quam corpus pertingere valet,

$$= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

Tempus vero, quo per AM ascendit, est

$$= \int \frac{-n\,dv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k} + n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}}.$$

Quare tempus totius ascensus per AMB erit

$$= 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

Si igitur corpus super linea inclinata AC (Fig. 63) descenderit et celeritate in C acquisita ascendat in CB usque ad B sitque $AC = N \cdot AD$ et $BC = n \cdot BE$ atque celeritas in C debita altitudini b, erit (§ 486)

$$AD = -\frac{2\sqrt{bk}}{N} + \frac{2gk}{N^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}},$$

$$AC = -2\sqrt{bk} + \frac{2gk}{N}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}},$$

$$BE = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}},$$

$$CB = 2\sqrt{bk} - \frac{2gk}{n}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

Atque tempus descensus per AC

$$= 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}}$$

(cit.) et tempus ascensus per CB

$$= 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

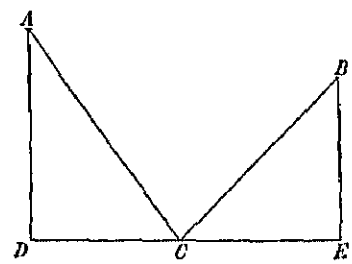


Fig. 63.

Unde descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

COROLLARIUM 4

510. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, ut sit $BE = AD$; est enim in quacunque resistentiae hypothesi, ut ex seriebus (§ 508 et § 488) intelligitur, $BE < \frac{b}{g}$ et $AD > \frac{b}{g}$. Fieri autem potest, ut sit $AC = BC$.

COROLLARIUM 5

511. Effici autem facile potest, ut tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB. Fieri scilicet debet

$$ng\sqrt{k} = Ng\sqrt{k} + Nn\sqrt{b} \quad \text{seu} \quad n = \frac{Ng\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}}.$$

Est igitur $n > N$ seu ang. $BCE <$ ang. ACD. Relatio autem inter N et n pendet a celeritate in puncto C.

COROLLARIUM 6

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit angulo ACD seu $N = n$, tempus ascensus per BC minus erit tempore descensus per AC. Atque hoc generaliter locum habet in quacunque resistentiae hypothesi; est enim tempus descensus per $AC > \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus per $CB < \frac{2n\sqrt{b}}{g}$, ut ex seriebus supra datis (§ 488 et § 508) apparet.

EXEMPLUM 2

513. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum; erit $m = 1$. Quare habebitur

$$x = \int \frac{-kdv}{gk + nv} = \frac{k}{n}\, l\, \frac{gk + nb}{gk + nv}$$

atque (Fig. 62, p. 239)

$$BC = \frac{k}{n}\, l\, \frac{gk + nb}{gk} \quad \text{et} \quad AB = kl\, \frac{gk + nb}{gk}.$$

Tempus vero ascensus per AM erit

$$= \int \frac{-nkdv}{(gk + nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} \left(A.\, \text{tang.} \sqrt{\frac{nb}{gk}} - A.\, \text{tang.} \sqrt{\frac{nv}{gk}} \right)$$

existente radio $= 1$ et A denotante arcum circuli. Erit ergo tempus ascensus per AB

$$= \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} A.\, \text{tang.} \sqrt{\frac{nb}{gk}}.$$

Si nunc corpus super linea inclinata AC (Fig. 63, p. 241) descenderit et celeritate in C acquisita, quae debita sit altitudini b, rursus ascendat per CB fueritque $AC = N \cdot AD$ et $BC = n \cdot BE$, erit

$$AD = \frac{k}{N}\, l\, \frac{gk}{gk - Nb} \quad \text{et} \quad AC = kl\, \frac{gk}{gk - Nb}$$

atque tempus descensus per AC

$$=\frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}}\,l\,\frac{\sqrt{gk}+\sqrt{Nb}}{\sqrt{gk}-\sqrt{Nb}}$$

(§ 487). Porro vero erit

$$BE=\frac{k}{n}\,l\,\frac{gk+nb}{gk},\quad BC=k\,l\,\frac{gk+nb}{gk}$$

et tempus ascensus per CB

$$=\frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}\,A.\,\mathrm{tang.}\sqrt{\frac{nb}{gk}}.$$

COROLLARIUM 7

514. In hac resistentiae hypothesi commode effici potest, ut sit $AC=BC$; debebit enim esse

$$ngk=Ngk+Nnb\quad \text{seu}\quad n=\frac{Ngk}{gk-Nb}.$$

Est igitur $n>N$ hincque ang. $BCE<$ ang. ACD.

EXEMPLUM 3

515. Sit resistentia quam minima et proportionalis potestati $2m$ celeritatum; erit k quantitas vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit debita altitudini b et $AC=N\cdot AD$ atque $BC=n\cdot BE$ corpusque super AC descendat et super CB ascendat, erit

$$AD=\frac{b}{g}+\frac{Nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$$

et tempus descensus per AC

$$=\frac{2N\sqrt{b}}{g}+\frac{2N^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$$

(§ 488). Pro ascensu vero erit

$$BE=\frac{b}{g}-\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$$

et tempus per CB

$$=\frac{2n\sqrt{b}}{g}-\frac{2n^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$$

(§ 508). Si igitur effici debeat, ut sit $AC = BC$, oportet esse

$$N + \frac{N^2 b^m}{(m+1)gk^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(m+1)gk^m},$$

unde fit

$$n = N + \frac{2N^2 b^m}{(m+1)gk^m}$$

propter quantitatem k valde magnam. At quo tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB, debet esse

$$N + \frac{N^2 b^m}{(2m+1)gk^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(2m+1)gk^m}$$

seu

$$n = N + \frac{2N^2 b^m}{(2m+1)gk^m}.$$

SCHOLION 1

516. In casu huius exempli, quo resistentia est valde parva, curva AMD (Fig. 64) potest determinari huius proprietatis, ut corpus ex C celeritate altitudini b debita ascendendo super quavis recta CM ad curvam AMD pertingat. Posita enim $CM = z$ et $MP = x$ erit $n = \frac{z}{x}$ atque

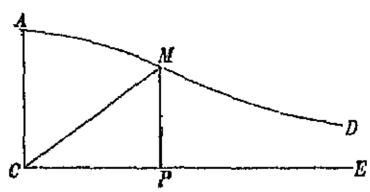


Fig. 64.

$$x = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m}.$$

Quare habebitur ista aequatio

$$b^{m+1} z = (m+1)gbk^m x - (m+1)g^2 k^m x^2.$$

Sit $CP = y$ et loco

$$\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$$

scribatur f; orietur

$$f\sqrt{(x^2 + y^2)} = bx - gx^2$$

seu

$$ffyy = (bb - ff)xx - 2gbx^3 + g^2 x^4.$$

Si ponatur $y = 0$, erit et $x = 0$ et $x = \frac{b-f}{g} = CA$. Curva ergo etiam per punctum C transit, quae autem eius pars quaestioni satisfacere cessat

propter sequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur, si n seu $\frac{z}{x}$ fit quoque valde magnum. Aequatio vero dat curvam ellipsiformem maxime oblongam circa axem minorem AC descriptam. Vera autem curva habet formam AMD, cuius asymtotos est horizontalis CE, si quidem est $m>1$, eiusque aequatio habetur omnibus sumendis terminis, quae erit

$$xdz+(m-1)zdx=\frac{bk^m(zdx-xdz)}{gk^m x+b^m z}.$$

Si $m<1$, curva non in infinitum progredietur, sed incidet in CE sumendo

$$CE=\frac{bk^m}{(1-m)b^m}.$$

Nam si $m<1$, corpus horizontaliter non in infinitum progredi potest, sed in distantia finita omnem amittit celeritatem.

SCHOLION 2

517. Si medium resistens non sit uniforme, tum linea non esset recta, super qua motus facillime determinari posset; idem quoque est notandum, si potentia sollicitans non fuerit uniformis. Ut sit potentia sollicitans $=P$ et resistentia $=\frac{V}{Q}$, ubi Q talis est functio exponentis resistentiae variabilis q, qualis V est ipsius v; his positis motus corporis super quacunque curva exprimitur hac aequatione

$$dv=\pm Pdx\pm\frac{Vds}{Q}.$$

Eius ergo curvae, super qua motus facillime definitur, haec erit aequatio

$$PQdx=Ads,$$

ex qua oritur sequens

$$\frac{Adv}{\pm A\pm V}=Pdx$$

motum super hac curva determinans, in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. Quare si etiam huiusmodi hypotheses persequi vellemus, loco linearum rectarum huiusmodi curvas hac aequatione expressas $PQdx=Ads$ assumere deberemus. Sed quia statuimus hypothesin potentiae sollicitantis et resistentiae uniformis tantum fusius pertractare, missis his ad eos casus progredimur, in quibus v unicam tantum habet dimensionem, id quod evenit, si resistentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROPOSITIO 59

PROBLEMA

518. *In hypothesi gravitatis uniformis g et resistentiae quadratis celeritatum proportionalis descendat corpus super curva quacunque AMB* (Fig. 57, p. 215); *determinare eius motum et pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.*

SOLUTIO

In axe verticali sumatur abscissa $AP = x$ et ponatur arcus $AM = s$, celeritas in M debita altitudini v et exponens resistentiae k; erit resistentia $= \frac{v}{k}$. Quamobrem ista habebitur aequatio motum corporis exponens

$$dv = gdx - \frac{vds}{k}$$

(§ 465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ eritque integralis

$$e^{\frac{s}{k}} v = \int e^{\frac{s}{k}} gdx.$$

Ita autem sumi debet hoc integrale, ut posito $s = 0$ abeat v in altitudinem celeritati initiali in A debitam. Si igitur descensus ex quiete fieri ponatur, $e^{\frac{s}{k}} gdx$ ita debet integrari, ut evanescat posito $s = 0$. Hoc itaque facto erit

$$v = ge^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx.$$

Unde tempus per AM erit

$$= \int \frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{\sqrt{g \int e^{\frac{s}{k}} dx}}.$$

Posito nunc $PM = y$ sumtoque dx constante erit pressio, quam curva in M secundum normalem MN sustinet,

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{\frac{-s}{k}} dxddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

519. Pressio, quam curva sustinet, in hanc formam potest transmutari

$$\frac{g\,ds}{e^{\frac{s}{k}}\,dy\,dx} - d.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}\,dx,$$

quae, postquam pro data curva integratum est $e^{\frac{s}{k}}dx$, commodius ad quosvis casus accommodatur.

COROLLARIUM 2

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, ubi est $v = \frac{gk\,dx}{ds}$. Hoc vero evenit, ubi est

$$e^{\frac{s}{k}}k\,dx = ds\int e^{\frac{s}{k}}\,dx$$

seu ubi

$$d.\,l\int e^{\frac{s}{k}}\,dx = \frac{ds}{k};$$

in quo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

COROLLARIUM 3

521. Si fuerit

$$\int e^{\frac{s}{k}}\,dx = \frac{e^{\frac{s}{k}}s^n}{a^{n-1}},$$

erit

$$dx = \frac{ns^{n-1}ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n ds}{a^{n-1}k}$$

atque

$$x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n-1}k}.$$

Quare si haec aequatio exprimat curvae quaesitae naturam, erit

$$v = \frac{gs^n}{a^{n-1}}$$

et tempus per AM

$$= \frac{2a^{\frac{n-1}{2}}s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\sqrt{g}},$$

si quidem n fuerit minor binario; nam si $n=2$ vel $n>2$, curva in A tangentem horizontalem habebit atque corpus ibi perpetuo permanebit.

COROLLARIUM 4

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fuerit potestas quaecunque ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper integrari posse $e^{\frac{s}{k}}dx$ atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

COROLLARIUM 5

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sumantur et celeritas, quam corpus in B habebit, debita sit altitudini b praetereaque vocetur $BQ = x$ et $BM = s$, erit

$$dv = -g\,dx + \frac{v\,ds}{k},$$

cuius integralis est

$$e^{\frac{-s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$$

integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ ita accepto, ut evanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit

$$v = be^{\frac{s}{k}} - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$$

et tempus, quo in descensu arcus MB absolvitur,

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)}}.$$

COROLLARIUM 6

524. Si igitur detur celeritas in puncto B, nempe $\sqrt{b}$, inveniri potest in curva BMA punctum A, ex quo corpus descendere incepit ubique celeritatem habuit $= 0$. Quaeri debet scilicet locus, ubi est

$$\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{b}{g}.$$

Atque etiam expressio temporis

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)}}$$

dabit tempus totius descensus per AMB, si post integrationem ponatur

$$\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = \frac{b}{g}.$$

SCHOLION

525. Duplicem hic motum investigandi modum ideo attulimus, ut tam ad descensus ex dato puncto factos quam ad descensus usque ad datum punctum, ut in motu oscillatorio fieri solet, accommodari possit.

PROPOSITIO 60

PROBLEMA

526. *Existente potentia sollicitante uniformi et medio uniformi resistente in duplicata ratione celeritatum determinare motum corporis ascendentis super data curva AMD* (Fig. 58, p. 220) *et pressionem, quam curva sustinet in singulis punctis M.*

SOLUTIO

In linea verticali AP ponatur abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$, celeritas in A debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Sit potentia sollicitans deorsum $= g$ et resistentia $= \frac{v}{k}$. His positis erit

$$dv = -g\,dx - \frac{v\,ds}{k}$$

(§ 475), quae multiplicata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale

$$e^{\frac{s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{s}{k}}\,dx$$

ita sumto $\int e^{\frac{s}{k}}\,dx$, ut evanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit

$$v = e^{\frac{-s}{k}}b - ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}\,dx$$

atque tempus ascensus per arcum AM

$$= \int \frac{e^{\frac{s}{2k}}\,ds}{\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{s}{k}}\,dx\right)}}.$$

Ex inventa celeritate habebitur pressio, quam curva in M secundum normalem MN patitur,

$$=\frac{g\,dy}{ds}-\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$$

(§ 475) posito $PM=y$ et sumto dx pro constante. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

527. Posito ergo $v=0$ erit

$$g\int e^{\frac{s}{k}}\,dx=b,$$

ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quousque corpus ex A ascendere poterit. Atque tempus totius ascensus per AMD habebitur, si in expressione temporis ponatur

$$g\int e^{\frac{s}{k}}\,dx=b.$$

COROLLARIUM 2

528. Si in formula pressionem exhibente loco v eius valor inventus substituatur, habebitur

$$-\frac{2e^{\frac{-s}{k}}\,b\,dx\,ddy}{ds^3}+\frac{g\,dy}{ds}+\frac{2ge^{\frac{-s}{k}}\,dx\,ddy\int e^{\frac{s}{k}}\,dx}{ds^3}.$$

Quae transmutari potest in hanc formam

$$-\frac{2e^{\frac{-s}{k}}\,b\,dx\,ddy}{ds^3}+\frac{g\,ds}{e^{\frac{s}{k}}\,dy\,dx}\,d.\,\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}\,dx.$$

COROLLARIUM 3

529. Pro descensu vero, si celeritas in A debita quoque est altitudini b, pressio, quam curva in M secundum normalem MN sustinet, est

$$=-\frac{2e^{\frac{s}{k}}\,b\,dx\,ddy}{ds^3}+\frac{ge^{\frac{s}{k}}\,ds}{dy\,dx}\,d.\,\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx.$$

COROLLARIUM 4

530. Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, aequatio ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus scribendo $-k$ loco k atque vicissim. Quare si super curva AM descensus fuerit determinatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

SCHOLION

531. Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter se habent affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari atque ideo oscillationes super data curva determinari. Id quod in sequente propositione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

PROPOSITIO 61

PROBLEMA

532. *Sint curvae quaecunque MA et NA* (Fig. 65) *in infimo puncto A coniunctae atque corpus descendat super curva [MA et ascendat super curva] AN in medio resistente uniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare descensum super curva MA et ascensum super curva AN.*

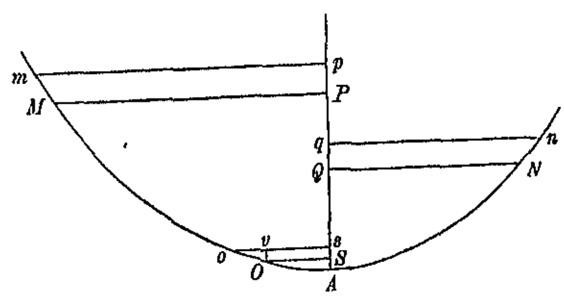


Fig. 65.

SOLUTIO

Sit celeritas in puncto A debita altitudini b atque in axe verticali AP abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$. Pro curva ascensus AN vero sit $AQ = t$ et $AN = r$. His positis erit corporis descendentis celeritas in M debita

altitudini

$$e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

(§ 523). Corporis vero ascendentis super curva AN celeritas in N debita est altitudini

$$e^{\frac{-r}{k}} b - g e^{\frac{-r}{k}} \int e^{\frac{t}{k}} dt$$

(§ 526). Quare si celeritates in M et N evanescant, ita ut MAN sit arcus una semioscillatione descriptus, erit

$$\frac{b}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx \quad \text{et} \quad \frac{b}{g} = \int e^{\frac{r}{k}} dt.$$

Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum mAn absolvens, in qua celeritas in puncto A debita sit altitudini $b + db$, erit

$$\frac{b+db}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx + e^{\frac{-s}{k}} dx$$

hincque

$$e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{db}{g} \quad \text{seu} \quad e^{\frac{-AM}{k}} \cdot Pp = \frac{db}{g}.$$

Similiter pro ascensu erit

$$e^{\frac{AN}{k}} \cdot Qq = \frac{db}{g}.$$

Ex quibus fiet

$$\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM+AN}{k}} \quad \text{seu} \quad lPp - lQq = \frac{AM+AN}{k}.$$

Dato ergo arcu MAN una semioscillatione descripto, si corpus in puncto proximo superiore m descendere incipiat, invenietur punctum n, ad quod supra N pertinget; erit nempe

$$Qq = \frac{Pp}{e^{\frac{AM+AN}{k}}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

533. Si igitur MAN et mAn fuerint duo arcus oscillationibus proximis descripti, erit semper $Qq < Pp$ eoque minus erit Qq quam Pp, quo maior fuerit summa arcuum $AM + AN$. Semper igitur quoque erit AQ minor quam AP.

COROLLARIUM 2

534. In vacuo, quia est $k=\infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}}=1$; fietque $Qq=Pp$ atque hinc $AQ=AP$. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitudinem, quanta erat illa, ex qua descendit.

COROLLARIUM 3

535. Si resistentia fuerit valde parva ideoque k vehementer magnum, erit

$$e^{\frac{AM+AN}{k}}=1+\frac{MAN}{k}.$$

Quare hoc casu erit

$$Qq+\frac{MAN\cdot Qq}{k}=Pp \quad \text{atque} \quad Qq=\frac{Pp\,(k-MAN)}{k}.$$

COROLLARIUM 4

536. Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam habet celeritatem, ibique ponatur $AO=s$, $AS=x$, erit

$$\frac{gk\,dx}{ds}=e^{\frac{s}{k}}b-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$$

seu

$$b=g\int e^{\frac{-s}{k}}dx+\frac{gk\,dx}{ds}\text{[1]}.$$

Quare si corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o existente

$$db=ge^{\frac{-s}{k}}dx+\frac{gk\,dy}{p},$$

existente $dy=ov$ et p radio osculi in puncto O, seu

$$\frac{db}{g}=e^{\frac{-AO}{k}}Ss+\frac{k\cdot ov}{p}.$$

---

1) Huius aequationis loco ponenda est aequatio

$$b=g\int e^{\frac{-s}{k}}dx+\frac{gk\,dx}{ds}e^{\frac{-s}{k}}.$$

Itaque etiam formulae sequentes corrigendae sunt P. St.

COROLLARIUM 5

537. Tempus unius itus per MAN habetur, si in integralium summa

$$\int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx\right)}} + \int \frac{e^{\frac{r}{2k}} ds}{\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt\right)}}$$

ponatur

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g} \quad \text{atque} \quad \int e^{\frac{r}{k}} dt = \frac{b}{g}.$$

Sicque prodibit tempus unius semioscillationis.

COROLLARIUM 6

538. Ex dictis alia elegans sequitur proprietas, ut si corpus ex A celeritate $\sqrt{b}$ ascendat ad N atque ex N iterum decidat per NA sitque celeritas, quam tum in A habebit, debita altitudini c, deinde ex A celeritate altitudini $b + db$ debita ascendat pertingatque ad n, unde rursus descendendo in A acquirat celeritatem altitudini $c + dc$ debitam. Erit ergo

$$\frac{db}{g} = e^{\frac{AN}{k}} \cdot Qq \quad \text{et} \quad \frac{dc}{g} = e^{\frac{-AN}{k}} \cdot Qq$$

atque

$$Qq^2 = \frac{db \cdot dc}{g^2}$$

vel etiam

$$\frac{db}{dc} = e^{\frac{2AN}{k}}.$$

SCHOLION

539. Restat, ut haec generalia ad exempla seu datas curvas accommodemus, quo usus eorum eo magis pateat. Accipiemus autem pro curva data cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}} dx$ in ea facile possit exhiberi et aequatio quoque inter s et x sit algebraica. Investigabimus ergo tam descensus super cycloide factos quam oscillationes, quo appareat, quantum oscillationes, quae in cycloide fiunt, ab isochronismo discrepent, quippe quae in vacuo omnes eodem tempore absolvi sunt demonstratae [§ 191].

PROPOSITIO 62

PROBLEMA

540. *Sit curva data cyclois ACB (Fig. 66) super basi horizontali AB provolutione circuli diametri CD descripta corpusque super ea ex A descendat in medio resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis descendentis.*

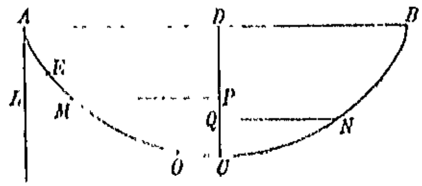


Fig. 66.

SOLUTIO

Posita $2CD = a$, $AE = x$ et $AM = s$ erit ex natura cycloidis

$$s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)} \quad \text{seu} \quad 2ax = 2as - ss.$$

Celeritas vero in M debita sit altitudini v; erit

$$v = ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}\,dx.$$

Quia autem est

$$dx = ds - \frac{sds}{a},$$

erit

$$\int e^{\frac{s}{k}}dx = ke^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2e^{\frac{s}{k}}}{a} - \frac{ke^{\frac{s}{k}}s}{a} - k - \frac{k^2}{a} = e^{\frac{s}{k}}\frac{ak + k^2 - ks}{a} - \frac{ak + k^2}{a}.$$

Quo valore substituto erit

$$v = \frac{gak + gk^2 - gks}{a} - \frac{ge^{\frac{-s}{k}}(ak + k^2)}{a}.$$

Maxima corporis erit celeritas, ubi est

$$v = \frac{gkdx}{ds} = \frac{gak - gks}{a};$$

hoc igitur accidit, ubi est

$$e^{\frac{s}{k}}k = a + k \quad \text{seu} \quad s = k\,l\frac{a+k}{k}.$$

Inveniri etiam potest punctum N, in quo corpus omnem celeritatem perdit, faciendo $v = 0$ seu

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{a+k}{a+k-s} \quad \text{seu} \quad s = k\,l\frac{a+k}{a+k-s},$$

ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN. Tempus, quo arcus AM descensu absolvitur, est

$$= \int \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk\left(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k)\right)}}.$$

Deinde ad pressionem inveniendam est

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{(2as-ss)}}{a} = \frac{\sqrt{2ax}}{a},$$

unde pressio ipsa in puncto M prodit

$$= \frac{g\sqrt{2ax}}{a} + \frac{2gak+2gkk-2gks}{a\sqrt{2ax}} - \frac{2gak+2gkk}{e^{\frac{s}{k}}a\sqrt{2ax}}.$$

Determinavimus ergo celeritatem et tempus et pressionem, unde motus corporis innotescit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

541. Quia est

$$e^{\frac{-s}{k}} = 1 - \frac{s}{1\cdot k} + \frac{s^2}{1\cdot 2k^2} - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} + \text{etc.},$$

si ponatur $a+k=c$ seu $a=c-k$, erit

$$\frac{(c-k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1\cdot k} - \frac{cs^2}{1\cdot 2k^2} + \frac{cs^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} - \text{etc.} = \frac{as}{1\cdot k} - \frac{cs^2}{1\cdot 2k^2} + \frac{cs^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} - \text{etc.}$$

Quare erit

$$v = \frac{gs}{a}\left(\frac{a}{1} - \frac{s}{1\cdot 2} - \frac{as}{1\cdot 2k} + \frac{(a+k)s^2}{1\cdot 2\cdot 3k^2} - \frac{(a+k)s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^3} + \text{etc.}\right)$$

COROLLARIUM 2

542. In vacuo igitur, ubi k est infinitum, erit

$$v = gs - \frac{gs^2}{2a} = gx,$$

ut constat. At si resistentia tantum sit valde parva et propterea k valde magnum, erit

$$v = gs - \frac{gs^2}{2a} - \frac{gs^2}{2k} + \frac{gs^3}{6ak}.$$

COROLLARIUM 3

543. In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis, ubi est $s = 0$ et $s = 2a$, i. e. in duobus cuspidibus A et B. In medio vero resistente alter locus est $s = 0$; alter vero ex hac aequatione erui debet

$$a = \frac{cs}{1 \cdot 2k} - \frac{cs^2}{1 \cdot 2 \cdot 3k^2} + \frac{cs^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^3} - \text{etc.},$$

unde invenitur

$$s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{10a^3k}{9c^3} + \frac{136\,a^4k}{135c^4} + \text{etc.}^{1)}$$

Si igitur k fuerit valde magnum, erit

$$s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k} \text{ quam proxime.}$$

COROLLARIUM 4

544. Eadem haec series inventa substituto $a + k$ loco c transformatur in hanc

$$s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{4a^3}{9k^2} - \frac{44a^4}{135k^3} + \text{etc.}^{2)},$$

ex qua valor ipsius s dat arcum ACN, quo usque corpus motu suo pervenire potest.

---

1) Editio princeps:

$$s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{13a^3k}{9c^3} + \frac{196\,a^4k}{135c^4} + \text{etc.}$$ Correxit P. St.

2) Editio princeps:

$$s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} + \frac{119a^4}{135k^3} + \text{etc.}$$ Correxit P. St.

COROLLARIUM 5

545. Arcus AO ab A usque ad O, ubi corpus maximam habet celeritatem, est

$$= k\,l\frac{a+k}{k} = a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2} - \frac{a^4}{4k^3} + \frac{a^5}{5k^4} - \text{etc.}$$

Quare erit arcus

$$ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{a^3}{9k^2} - \text{etc.}^{1)},$$

$$OC = \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3} - \text{etc.}$$

et

$$-AO + ON = \frac{a^2}{3k} - \frac{2a^3}{9k^2} + \text{etc.}^{2)}$$

COROLLARIUM 6

546. Celeritas vero in puncto C reperitur debita altitudini

$$= \frac{gk^2 - ge^{\frac{-a}{k}}(ak+kk)}{a} = g\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1\cdot 3k} + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 4k^2} - \frac{a^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5k^3} + \frac{a^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6k^4} - \text{etc.}\right).$$

Unde perspicitur celeritatem in C nunquam posse esse evanescentem; nam altitudo huic celeritati debita est

$$= \frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}}a}\left(e^{\frac{a}{k}} - 1 - \frac{a}{k}\right)$$

atque $e^{\frac{a}{k}}$ semper maius est quam $1 + \frac{a}{k}$; excessus autem maior est quam $\frac{a^2}{2k^2}$. Quare altitudo debita celeritati in C maior est quam $\frac{ga}{2e^{\frac{a}{k}}}$ ideoque ACN maior est quam AC.

---

1) Editio princeps:

$$ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{4a^3}{9k^2} - \text{etc.} \qquad \text{Correxit P. St.}$$

2) Editio princeps:

$$-AO + ON = \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{9k^2}. \qquad \text{Correxit P. St.}$$

COROLLARIUM 7

547. Altitudo debita celeritati maximae in O est

$$= gk - \frac{gk^2}{a} l \frac{a+k}{k} = g\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \frac{a^4}{5k^3} + \text{etc.}\right).$$

Quare excessus huius altitudinis supra altitudinem celeritati in C debitam est

$$= g\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 4k^2} - \frac{5a^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5k^3} + \frac{23a^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6k^4} - \text{etc.}\right) = ge^{\frac{-a}{k}}\left(\frac{a^3}{8k^2} - \frac{a^4}{24k^3} + \text{etc.}\right)$$

Haec nempe expressio obtinetur, si in generali valore ipsius v substituatur $kl\frac{a+k}{k}$ loco s, quippe cui quantitati arcus AO est aequalis.

SCHOLION

548. In solutione huius propositionis considerandum venit, quod ex formula descensum tantum determinante etiam ascensum corporis super arcu CN derivavimus; ex quo dubium oriri potest, an iste ascensus legitime sit definitus. Hoc autem ex ipsa formula ascensum determinante facile perspicitur. Usi enim fuimus formula hac

$$dv = gdx - Rds,$$

quae puncto M ultra punctum C cadente propter dx factum negativum abit in hanc

$$dv = -gdx - Rds,$$

quae revera naturam ascensus continet. Ex his intelligitur continuitas inter ascensum et descensum, qua nullo interiecto saltu inter se cohaerent. Ubi enim curva se sursum flectere incipit, ibi simul formula descensui inserviens transmutatur sponte in formulam ascensus. Atque haec connexio locum habet in medio quocunque resistente, uti ex generalibus formulis apparet, quae tantum signo ipsius dx discrepant. Quamobrem data aequatione pro curva quacunque non est necesse, ut inquiratur, super quanam parte corpus ascendat descendatve, sed alterutra formula ad aequationem accommodata verum dabit motum super curva proposita. Hoc tantum est tenendum, ut abscissae in axe verticali capiantur atque ea formula sive ascensus sive descensus adhibeatur, quae cum motus initio congruat.

PROPOSITIO 63

PROBLEMA

549. *Sit curva data ACB* (Fig. 66, p. 255) *cyclois super basi horizontali AB descripta et deorsum spectans corpusque super ea oscillationes peragat in medio resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum oscillatorium.*

SOLUTIO

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$ in eaque sumatur abscissa $CP = x$ et arcus CM vocetur s; erit ex natura cycloidis

$$s = \sqrt{2ax} \quad \text{et} \quad x = \frac{ss}{2a} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{sds}{a}.$$

Descendat nunc corpus super arcu MC sitque eius celeritas in C debita altitudini b; erit altitudo debita celeritati in M

$$= e^{\frac{s}{k}}b - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$$

(§ 523). Est vero

$$\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \int \frac{e^{\frac{-s}{k}}sds}{a} = \frac{k^2 - k^2e^{\frac{-s}{k}} - ke^{\frac{-s}{k}}s}{a};$$

quare altitudo debita celeritati in M est

$$= \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab - gk^2) + gk^2 + gks}{a} = e^{\frac{s}{k}}b - \frac{g}{a}\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2\cdot 3k} + \frac{s^4}{2\cdot 3\cdot 4k^2} + \frac{s^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5k^3} + \text{etc.}\right).$$

Arcus ergo, in quo integer fit descensus, habebitur, si ipsius s valor ex hac aequatione quaeratur

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}.$$

Fiet autem hinc in serie

$$s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{11A^3}{72k^2} + \frac{43A^4}{540k^3} + \text{etc.}^{1)}$$

1) Editio princeps:

$$s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} + \text{etc.}$$

Correxit P. St.

posito brevitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM, si quidem corpus ex puncto M descendere inceperit. Celeritatem maximam corpus habebit in O sumto $CO = s$ ex hac aequatione

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab} \quad \text{seu} \quad CO = kl\frac{gk^2}{gk^2 - ab}$$

atque altitudo huic maximae celeritati debita est

$$= \frac{gk\cdot CO}{a} = \frac{gk^2}{a}l\frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} + \text{etc.}$$

Ad tempus determinandum convenit ad punctum O celeritatemque maximam respicere et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem celeritati in O debitam $= c$ et arcum $MO = q$; erit

$$CO = \frac{ac}{gk} \quad \text{et} \quad ab = gk^2\left(1 - e^{\frac{-ac}{gk^2}}\right), \quad s = \frac{ac}{gk} + q.$$

His substitutis erit altitudo debita celeritati in M, seu v,

$$= \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}}gk^2}{a}.$$

Quia nunc v minor est quam c, pono $c - v = z$ eritque

$$az = -gk^2 - gkq + e^{\frac{q}{k}}gk^2$$

atque in serie

$$\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} + \text{etc.}$$

Ex qua convertendo fit

$$q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Incipiat descensus in puncto M; erit ibi $v = 0$ et $z = c$ ideoque

$$OM = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Ex eadem formula, si ponatur q negativum, habebitur motus per OCN; at quia perinde est, sive q ponatur negativum sive k, erit arcus ON, si N fuerit punctum, quousque corpus ascendit,

$$= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

Tempus vero per MO hoc modo invenitur: quia est

$$ds = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \frac{a^2zdz\sqrt{2az}}{432g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.},$$

hoc divisum per $\sqrt{v} = \sqrt{(c-z)}$ dat elementum temporis

$$= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g(cz-z^2)}} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}} + \frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g(cz-zz)}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3\sqrt{(c-z)}}$$
$$+ \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^2k^4\sqrt{g(cz-z^2)}} - \text{etc.}$$

Quod ita integrari debet, ut posito $v=c$ vel $z=0$ evanescat; deinde si ponatur $z=c$, habebitur tempus, quo corpus per arcum MO descendit. Hoc igitur tempus, posita peripheriae ad diametrum ratione π ad 1, erit

$$= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{16a^2c\sqrt{c}}{405g^2k^3} + \text{etc.}^{1)}$$

Posito igitur k negativo erit tempus, quo corpus ex O ad N usque ascendit,

$$= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{16a^2c\sqrt{c}}{405g^2k^3} + \text{etc.}^{1)}$$

Tempus ergo per MON seu tempus unius dimidiae oscillationis est

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

Q. E. I.

1) Editio princeps: $\frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ $\left(\text{loco } \frac{16a^2c\sqrt{c}}{405g^2k^3}\right)$. Correxit P. St.

COROLLARIUM 1

550. Si ergo celeritas maxima corporis descendentis fuerit debita altitudini c, propter

$$CO = \frac{ac}{gk}$$

erit

$$MC = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Totus vero ascensus CN erit

$$= ON - CO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

Hinc erit

$$CM - CN = \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3} - \text{etc.}$$

atque

$$MCN = \frac{2\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{540g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 2

551. Si totus arcus descensus MC ponatur $= E$ et sequens arcus ascensus $CN = F$ atque altitudo debita celeritati in $C = b$, erit

$$\frac{ab}{g} = k^2 - e^{\frac{-E}{k}}(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} - \text{etc.}$$

Atque posito k negativo eodem modo invenitur

$$\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4} + \text{etc.}$$

Ex quibus fit

$$F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{44E^4}{135k^3} + \frac{104E^5}{405k^4} - \text{etc.}^{1)}$$

atque altitudo debita celeritati maximae

$$c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$$

---

1) Editio princeps:

$$F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4} + \text{etc.}$$

Correxit P. St.

COROLLARIUM 3

552. Quia F est arcus ascensus in prima dimidia oscillatione, erit idem arcus F arcus descensus in sequente oscillatione; cum quo ergo coniungetur arcus ascensus

$$G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{328E^4}{135k^3} + \frac{1376E^5}{405k^4} - \text{etc.}^{1)}$$

Atque simili modo sequentes oscillationes, quotquot libuerit, definiri possunt.

COROLLARIUM 4

553. Ex aequatione tempus exponente apparet tempus, quo corpus ex M ad O pervenit, semper minus esse tempore, quo corpus ex O ad N usque pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior est quam arcus OM, arcus vero CN minor est arcu MC.

COROLLARIUM 5

554. Si oscillationes fuerint infinite parvae seu c quantitas evanescens, congruent oscillationes cum oscillationibus in vacuo factis; in singulis enim expressionibus iidem termini evanescent, qui evanescerent posito $k = \infty$. Minimis ergo oscillationibus isochronae erunt oscillationes penduli longitudinis a in vacuo sollicitati a potentia g seu penduli in hypothesi gravitatis $= 1$, cuius longitudo est $= \frac{a}{g}$.

COROLLARIUM 6

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora oscillationum quoque fient maiora; quare in hac resistentiae hypothesi cyclois tautochronismi proprietate non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fuerit celeritas maxima, maior quoque erit excessus temporis oscillationis huiusmodi supra tempus oscillationis minimae.

---

1) Editio princeps:

$$G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^5}{405k^4} - \text{etc.}$$

Correxit P. St.

SCHOLION 1

556. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo congruere, locum habet, si a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si enim a esset infinite magnum seu k infinite parvum, sequentes termini tempus exprimentes

$$\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}+\text{etc.}$$

non evanescerent, etiamsi c esset infinite parvum. Tum igitur tantum oscillationes minimae super curva quacunque in vacuo et medio resistente inter se congruent, quando neque radius osculi curvae in infimo puncto fuerit infinite magnus neque resistentia infinite magna.

EXEMPLUM

557. Exempli loco evolvamus casum, quo resistentia tam fit exigua ideoque k quantitas tam magna, ut fractiones, in quarum denominatoribus k plures duabus habet dimensiones, tuto pro nihilo haberi possint. Dicta igitur altitudine celeritati maximae in O debita c, ita ut sit $CO=\frac{ac}{gk}$, erit arcus descensus

$$MC=E=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}+\frac{2ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$$

et sequens arcus ascensus

$$CN=F=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}-\frac{2ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

Unde invenitur

$$\sqrt{c}=\frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}}-\frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}}+\frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$$

seu

$$c=\frac{gE^2}{2a}-\frac{gE^3}{3ak}+\frac{gE^4}{4ak^2}$$

atque

$$F=E-\frac{2E^2}{3k}+\frac{4E^3}{9k^2}.$$

Tempus ergo dimidiae oscillationis per MCN est

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}.$$

In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus

$$=F=E-\frac{2E^2}{3k}+\frac{4E^3}{9k^2},$$

quem sequetur arcus ascensus

$$=G=E-\frac{4E^2}{3k}+\frac{16E^3}{9k^2};$$

atque tempus huius dimidiae oscillationis erit

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}-\frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}},$$

ubi ultimus terminus negligi potest ob k^3 in denominatore. In tertia semioscillatione est arcus descensus

$$=G=E-\frac{4E^2}{3k}+\frac{16E^3}{9k^2}$$

et arcus descensus

$$=H=E-\frac{6E^2}{3k}+\frac{36E^3}{9k^2}.$$

Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n, est arcus descensus

$$=E-\frac{2(n-1)E^2}{3k}+\frac{4(n-1)^2E^3}{9k^2}$$

et arcus ascensus

$$=E-\frac{2nE^2}{3k}+\frac{4n^2E^3}{9k^2}.$$

Quamobrem post n semioscillationes corpus ab infimo puncto C distabit arcu

$$E-\frac{2nE^2}{3k}+\frac{4n^2E^3}{9k^2},$$

qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis quantitate

$$\frac{2nE^2}{3k}-\frac{4n^2E^3}{9k^2}.$$

Tempus autem semioscillationis numero n indicatae erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}.$$

At si totus arcus primae semioscillationis MCN dicatur A, erit

$$A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} \quad \text{et} \quad E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$$

evanescente sponte termino sequente. Hinc totus arcus oscillatione per numerum n indicata descriptus erit

$$= 2E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2A^3}{9k^2}.$$

COROLLARIUM 7

558. Si n fiant oscillationes dimidiae et arcus descensus primae oscillationis fuerit E et arcus ascensus ultimae $= L$, erit

$$L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2},$$

quae expressio, si per seriem propius capiatur, fere congruet cum progressione geometrica eiusdem initii hancque ob rem erit

$$L = \frac{3Ek}{3k+2nE} \quad \text{seu} \quad 3k(E-L) = 2nEL.$$

COROLLARIUM 8

559. Hinc, si peractis aliquot semioscillationibus detur arcus descensus primae oscillationis E una cum arcu ascensus ultimae L, inveniri potest numerus semioscillationum; namque est

$$n = \frac{3k(E-L)}{2EL}.$$

COROLLARIUM 9

560. Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere, sed ex n et E datis idem reperitur arcus L, quaecunque fuerit longitudo penduli a. Atque est semper n proportionalis ipsi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

SCHOLION 2

561. Huiusmodi experimenta circa oscillationes in medio resistente multa recenset NEUTONUS in *Phil.* Lib. II., ubi notat arcum descensus primae, arcum descensus ultimae oscillationis atque numerum oscillationum tam in aere quam in aqua et mercurio.[1]) Quare si haec media perfecte resisterent in duplicata celeritatum ratione, congrua esse deberent cum hisce formulis, ita ut decrementum arcus proportionale esset numero oscillationum et arcui primo et ultimo coniunctim. Quod etiam locum habere observavi in maioribus oscillationibus, in quibus celeritas non est nimis exigua. At in oscillationibus minimis maxima aberratio ab hac regula conspicitur. Ex quo colligitur, quo maior fuerit corporis celeritas in fluido, eo propius resistentiam accedere ad rationem duplicatam celeritatum, motum autem tardissimum alii resistentiae insuper esse obnoxium, quae in motibus celerioribus prae resistentia, quae quadratis celeritatum est proportionalis, evanescat. In hisce quoque experimentis NEUTONUS resistentiam partim simplici celeritatum rationi, partim sesquiplicatae, partim duplicatae proportionalem assumsit neque tamen pro motibus tardissimis satisfecit. In ultima vero *Phil.* editione[2]) ipse NEUTONUS quoque insufficientem priorem theoriam suam agnoscit atque pluribus rationibus ostendit alteram illam fluidorum resistentiam esse constantem seu temporis momentis proportionalem, quam antea ipsis celeritatibus proportionalem erat arbitratus. Hanc ob rem istam resistentiam cum ea, quae quadratis celeritatum est proportionalis, in sequente propositione coniunctam considerabimus, cum praesertim aequationum resolutio et celeritatum determinatio hac adiectione non difficilior evadat.

COROLLARIUM 10

562. Quod ad tempora oscillationum et semioscillationum attinet, perspicuum est ea decrescere, quo minores fiant arcus descripti, atque si arcus plane evanescant, tempus dimidiae oscillationis fore

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

---

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. II sectio VI: De motu et resistentia funependulorum. P. St.

2) Editio tertia, Londini 1726. P. St.

COROLLARIUM 11

563. Excessus autem cuiusque semioscillationis temporis supra tempus minimae semioscillationis in casu resistentiae minimae est

$$\frac{\pi E^2 \sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$$

denotante E arcum descensus illius semioscillationis. Quare iste excessus proportionalis est quadrato arcus descensus vel etiam quadrato totius arcus semioscillatione descripti.

SCHOLION 3

564. Cyclois igitur, quae ab HUGENIO apta est demonstrata ad isochronismum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio resistente in duplicata celeritatum ratione amittit et hanc ob rem in aere non inservit, nisi vel oscillationes sint valde parvae vel inter se proxime aequales. Ex hoc vero, quod maiores oscillationes diutius durent, colligi licet veram curvam tautochronam in hac resistentiae hypothesi magis esse curvam quam cycloidem. Quemadmodum scilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois est in infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrona in cycloide continebitur atque eius curvedo a puncto infimo magis decrescet quam curvedo cycloidis.

PROPOSITIO 64

PROBLEMA

565. *Si medii resistentia partim fuerit constans, partim quadratis celeritatum proportionalis, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide MCB* (Fig. 66, p. 255), *saltem in casu, quo resistentia est valde parva.*

SOLUTIO

Sit ut ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$, $CP = x$ et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorsum sollicitans sit $= g$, pars resistentiae, quae est constans, sit $= h$ et pars resistentiae quadratis celeri-

tatum proportionalis sit $= \frac{v}{k}$ ut ante; erit k quantitas valde magna respectu v et s et a atque h valde parvum respectu g. Iam fiat descensus super arcu MC; erit

$$dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}$$

atque hinc

$$v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} (gdx - hds).$$

At quia est ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$, erit

$$\int e^{\frac{-s}{k}} gdx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{\frac{-s}{k}} - gke^{\frac{-s}{k}} s}{a}$$

et

$$\int e^{\frac{-s}{k}} hds = hk - hke^{\frac{-s}{k}};$$

unde fit

$$v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + hak - gk^2) - hak + gk^2 + gks}{a}$$

Celeritas maxima habetur, si fuerit

$$\frac{gs}{a} = h + \frac{v}{k}$$

seu

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - hak}.$$

Dicatur altitudo debita celeritati maximae in $O = c$; erit

$$CO = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk}$$

et

$$ab = gk^2 - hak - gk^2 e^{\frac{-hak - ac}{gk^2}}.$$

Ponatur arcus $MO = q$; erit

$$s = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk} + q;$$

unde fit

$$v = \frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}.$$

Quia nunc v minus est quam c, pono $c-v=z$; erit

$$az+gk^2+gkq=e^{\frac{q}{k}}gk^2.$$

Quae aequatio in seriem conversa dat ut supra

$$\frac{az}{g}=\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{6k}+\frac{q^4}{24k^2}$$

atque

$$q=\frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}}-\frac{az}{3gk}+\frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

Incipiat descensus ex M; erit ibi $v=0$ et $z=c$ ideoque

$$MO=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}-\frac{ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

Ex eadem formula reperitur arcus ascensus

$$ON=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}+\frac{ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}};$$

atque cum in his h non reperiatur, erit ut supra tempus semioscillationis per MON

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}.$$

Totus vero arcus descensus MC erit

$$=\frac{ha}{g}+\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}+\frac{2ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$$

atque arcus ascensus

$$CN=-\frac{ha}{g}+\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}-\frac{2ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

Quare si arcus descensus MC ponatur E et arcus ascensus $CN=F$, erit

$$F=E-\frac{2ha}{g}-\frac{2E^2}{3k}+\frac{4haE}{3gk}+\frac{4E^3}{9k^2}.$$

In sequente semioscillatione est arcus descensus F et arcus ascensus

$$G = E - \frac{4ha}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16haE}{3gk} + \frac{16E^3}{9k^2}.$$

Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n, arcus ascensus est

$$= E - \frac{2nha}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2haE}{3gk} + \frac{4n^2E^3}{9k^2} = \frac{3gkE - 6hnak}{3gk + 2gnE}.$$

Quare si peractis n semioscillationibus dicatur arcus descensus primae E et arcus ascensus ultimae L, erit

$$2gnEL = 3gk(E-L) - 6hnak$$

seu

$$n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6hak}.$$

Tempus vero, quo quaelibet semioscillatio per MCN absolvitur, est

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE-ha)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$$

loco c eius valore substituto. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

566. Si ponatur $c = 0$, ut locus prodeat, in quo corpus sit quieturum, invenitur

$$MC = \frac{ha}{g};$$

corpus ergo in quiete permanere potest non solum in puncto C, sed extra C quoque in distantia $\frac{ha}{g}$ cis et ultra C. Quare in huiusmodi medio resistente ex statu quietis penduli non exacte linea verticalis potest cognosci, sed angulo, cuius sinus est $\frac{h}{g}$, aberrari potest.

SCHOLION 1

567. Huiusmodi resistentiam in aqua locum habere experimentis facile evincitur, quippe in motibus tardissimis resistentia quadratis celeritatum minime proportionalis observatur; in fluido vero praeter resistentiam quadratis

celeritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistentiam constantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a LA HIRIO institutis, quibus monstravit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete permanere posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate penderet. Ex experimentis NEUTONI, quae circa retardationem motus pendulorum in aere instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistentiam constantem esse circiter partem millionesimam gravitatis seu $\frac{h}{g} = \frac{1}{1000000}$ [1]). Hic ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo [circiter] 10‴, qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis esse hic poterit error, quo minor simulque levior globus adhibeatur.

COROLLARIUM 2

568. Ad hunc angulum inveniendum inservit ista aequatio ex superiori [§ 565] deducta

$$\frac{h}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3ak}$$

= sinui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At loco E arcum parvum accipi convenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensibiles.

COROLLARIUM 3

569. Ex aequatione

$$n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6hak}$$

apparet, quo maior sit arcus oscillatione descriptus, eo minorem fieri terminum $6hak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resistentia tantum in minimis oscillationibus sentiatur.

COROLLARIUM 4

570. Quia h est numerus tum per hypothesin valde parvus tum in subtilibus fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, reipsa fere evane-

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. II sectio VI: De motu et resistentia corporum funependulorum, Scholium generale. P. St.

scens, in expressione temporis evanescet quoque ha prae gE ideoque tempus unius semioscillationis erit

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24h^2\sqrt{g}}.$$

Resistentia igitur constans non immutabit tempora oscillationum.

SCHOLION 2

571. Etiamsi ergo haec resistentia constans cum resistentia quadratis celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculus eo neque fit prolixior neque difficilior. Nam ex celeritate maxima $\sqrt{c}$ totus arcus una semioscillatione descriptus eodem modo determinatur, sive haec resistentia constans adsit sive non; utroque enim casu plane eadem obtinetur aequatio. Quamobrem vel ex hoc ipso sequi videtur hanc resistentiae legem in natura locum habere, alias vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, actu non inveniri. Fluida autem iam pridem [Tom. I § 490] duplicem resistentiam exercere observata sunt, alteram quadratis celeritatum proportionalem, quae in motibus celerioribus sola observetur, alteram in motibus tardissimis tantum sensibilem. Illa resistentia oritur a vi inertiae particularum fluidi et per eam corpus de motu suo amittit, quando particulas eas removet; quam quadratis celeritatum proportionalem esse dubitari nequit. Haec vero resistentia a tenacitate fluidi ortum habet, qua particulae fluidi inter se cohaerent et difficulter a se invicem separantur. Dum igitur corpus per datum spatium movetur, datus particularum numerus ipsi spatio proportionalis a se invicem divelli debet; quare haec resistentia congruit cum potentia absoluta motum corporis retardante, quippe quae etiam per aequalia spatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit. Haec igitur resistentia seu vis motui corporis semper est contraria et secundum ipsam directionem motus in corpus agit atque ideo est vis tangentialis perpetuo constans et retardans. At hoc casu natura a calculo exceptionem postulat, quando corpus quiescit. Quoniam enim haec vis est constans, aeque agere deberet in corpus quiescens ac in motum; quiescens autem corpus, quia fluidi particulas non divellit, hanc vim sentire nequit. Accedit ad hoc, quod, cum haec vis directioni motus sit contraria, ea in corpus quiescens, quod nullam habeat directionem, nullum effectum habere queat. At si motus super linea curva investigatur, tangens curvae semper pro directione motus habetur, etiamsi

corpus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore quiescente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod parvum spatium circa C in quiete permanere posse ideo est dicendum, quia eius nisus versus C non sufficit ad particulas fluidi a se invicem separandas. Quare corpus quiescere potest in quolibet puncto illius spatioli, etiamsi calculus ostendat etiam in ipso puncto C corpus non in quiete perseverare posse.

SCHOLION 3

572. Ex his, quae partim generaliter tradidimus, partim de cycloide attulimus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione celeritatum motus corporis super quacunque curva possit determinari. Consideravimus quidem medium resistens uniforme et potentiam sollicitantem quoque aequabilem; sed ex aequatione resolvenda apparet eam quoque integrari posse, quomodocunque tum medium sit difforme tum potentia sollicitans variabilis; semper enim in aequatione altitudo celeritati debita v unicam tantum habet dimensionem. Progredior igitur ad alias medii resistentis hypotheses; sed quia tum non pro quavis curva motus potest definiri, curvae primo sunt inveniendae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic autem iuxta institutum nostrum eas curvas, quae ad aequationem homogeneam deducunt, in qua indeterminatae ubique eundem obtinent dimensionum numerum. Si resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habetur ista aequatio

$$dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m};$$

quae quo sit homogenea inter v et x, debet esse

$$ds = x^{-m} dx \quad \text{seu} \quad s = a^m x^{1-m} \quad \text{seu} \quad x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}.$$

Vel si x et s datis quantitatibus augeantur vel diminuantur, in curva, cuius haec est aequatio

$$x = a^{\frac{m}{m-1}} (s + f)^{\frac{1}{1-m}} - a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}},$$

motus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in simplici ratione celeritatum curva fit cyclois ideoque motum super ea determinemus.

PROPOSITIO 65

PROBLEMA

573. *In medio, quod resistit in simplici ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide ACB* (Fig. 66, p. 255) *existente tam medio quam potentia sollicitante uniformi.*

SOLUTIO

Sit iterum ut ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$, abscissa $CP = x$ et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorsum trahens sit $= g$ et resistentia $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus; erit ex natura descensus

$$dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a};$$

erit

$$v = \frac{ku^2}{a^2} \quad \text{et} \quad dv = \frac{2kudu}{a^2},$$

unde fit

$$2kudu = -gasds + auds,$$

quae aequatio ita debet integrari, ut facto $s = 0$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. Pro ascensu vero super arcu CN haec habetur aequatio

$$2kudu = -gasds - auds.$$

Ponatur $u = ps$; habebitur pro descensu

$$2kp^2sds + 2kps^2dp = -gasds + apsds$$

seu

$$\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}.$$

Hinc fit integrando

$$ls = lC - \frac{1}{2}l\left(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}\right) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-8gak)}}\,l\frac{4kp - a + \sqrt{(a^2-8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2-8gak)}}$$

$$= lC - \frac{1}{2}l\frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-8gak)}}\,l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}$$

seu [mutata significatione litterae C]

$$lC = l(2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\,l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}.$$

Ponatur $s = 0$ et $v = b$; fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc fiet

$$\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}.$$

In altera vero curvae parte CN pro ascensu corporis posito $CN = s$ habetur haec aequatio

$$\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}.$$

Si altitudo coleritati maximae, quae sit in O, debita dicatur c, erit

$$CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$$

atque

$$c = b\left(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2-8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}.$$

Hae autem aequationes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$ seu $k < \frac{a}{8g}$. Nam si $k > \frac{a}{8g}$, aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul pendebunt.

Ponamus esse $k = \frac{a}{8g}$ eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2} = \frac{-dp}{p - \frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2}.$$

Integrando ergo prodibit

$$ls = lC - l\left(p - \frac{a}{4k}\right) + \frac{a}{4kp - a} = lC - l\left(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}\right) + \frac{as}{4a\sqrt{kv} - as}$$

[seu mutata significatione litterae C]

$$= lC - l(4a\sqrt{kv} - as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv} - as}.$$

Fit igitur $lC = l4a\sqrt{kb}$; unde habebitur

$$l\frac{4\sqrt{kv} - s}{4\sqrt{kb}} = \frac{s}{4\sqrt{kv} - s}.$$

Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $= 0$; semper enim $4\sqrt{kv}$ maius esse debet quam s. Hoc ergo casu, si celeritas in puncto C sit realis, descensus initium fit imaginarium. Quare ubicunque corpus descensum inceperit, celeritas in puncto infimo C erit $= 0$. Ad motum igitur investigandum, si descensus fit ex puncto dato E fueritque $CE = f$, erit

$$lC = l - af + 1$$

ideoque

$$l\frac{s - 4\sqrt{kv}}{f} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv} - s}.$$

Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt{kv} < s$, quamobrem in puncto C, ubi $s = 0$, debet quoque esse $v = 0$. Maxima celeritas, quae sit in O, habetur ponendo

$$\sqrt{v} = \frac{gs\sqrt{k}}{a} \quad \text{seu} \quad s = 8\sqrt{kv},$$

quo posito prodit

$$l\frac{s}{2f} = -1 \quad \text{seu} \quad s = \frac{2f}{e} = CO$$

denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$. His igitur casibus, quibus arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At si corpus per arcum CN celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, motus hac aequatione exprimetur

$$l\frac{4\sqrt{kv} + s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv} + s},$$

ex qua patet esse

$$s + 4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb} \quad \text{et} \quad \sqrt{v} < \sqrt{b} - \frac{s}{4\sqrt{k}}.$$

Totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v = 0$ tumque erit

$$l\frac{s}{4\sqrt{kb}} = -1 \quad \text{seu} \quad CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}.$$

Si est $k < \frac{a}{8g}$, quem casum iam tractavimus, resistentia adhuc fit maior, quamobrem multo magis celeritas in C erit $= 0$, si quidem descensus ex puncto dato fiat, atque pro data celeritate in C initium descensus erit imaginarium. Quamobrem aequatio, quam pro descensu dedimus, est imaginaria, nisi constans determinetur ex dato descensus initio. Sit igitur arcus $CE = f$; erit

$$lC = lgaf^2\sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

factoque $s = 0$ erit

$$l\frac{gf^2}{2av} = -\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\,^{1)},$$

si v non esset $= 0$; nam si v est $= 0$, haec aequatio non valet. Apparet autem hanc aequationem contradictionem continere, quia $2av$ maius esse deberet quam gff seu $2v > \frac{gss}{a}$ posito s pro f. At est $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita esset $v > gx$, quod est absurdum; nam in vacuo est tantum $v = gx$ atque in medio resistente adhuc minor esse debet. Pro ascensu autem inservit aequatio inventa atque ex ea totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v = 0$, quo posito prodit

$$\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}} = \frac{g \cdot CQ}{b}.$$

Ex his igitur perspicitur, si fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$, oscillationes peragi non posse, quia post nullum descensum ascensus sequi potest. Quare nobis potissimum reliqui casus, quibus est $k > \frac{a}{8g}$, sunt investigandi; quia enim in his resistentia est minor atque quantumvis parva assumi potest, oscillationes utique perfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus

$$\frac{-ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}},$$

1) Editio princeps: *factoque* $s = 0$ *erit* $l\frac{gf^2}{av} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$. Quamobrem etiam formulae sequentes corrigendae erant; nihilominus EULERI conclusio valet. P. St.

quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc

$$\frac{-ds}{s} = \frac{qdq + \frac{adq}{4k}}{qq + \frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}.$$

Ponatur

$$\frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2,$$

quia est quantitas affirmativa, eritque

$$lC - ls = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4k}\int\frac{dq}{q^2 + B^2} = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4Bk}At.\frac{q}{B},$$

ubi $At.\frac{q}{B}$ est arcus circuli, cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existente sinu toto $= 1$. Restituto autem pro q valore debito erit [mutata significatione litterae C]

$$lC = l\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})} + \frac{a}{4Bk}At.\frac{4a\sqrt{kv} - as}{4Bks}.$$

Ponatur ad lC definiendum $s = 0$ et $v = b$; erit

$$lC = l\sqrt{2ab\sqrt{k}} + \frac{a}{4Bk}At.\infty,$$

quare erit

$$l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = -\frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bks}{4a\sqrt{kv} - as}.$$

Pro ascensu vero per arcum CN invenitur

$$l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bks}{4a\sqrt{kv} + as}.$$

Posito nunc $v = 0$ prodit integer arcus descensus MC ex hac aequatione

$$l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g \cdot CP}}.$$

Atque totus arcus ascensus CN invenietur ex hac aequatione

$$l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g \cdot CQ}}.$$

Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et descensus inter se aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus, quorum tangens est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet, alius pro descensu. Atque cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum ad propositum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine prodeunt successive omnes arcus tam ascensus quam descensus, quamdiu corpus oscillationes peragit; nam quia aequatio inventa est generalis, ea omnia loca ostendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas unquam est $=0$. Quare in hac resistentiae hypothesi hoc habetur commodum, quod statim pro qualibet oscillatione, centesima v. gr., arcus tam descensus quam ascensus possit definiri. Sit arcus D, cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$ erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum

$$D, \quad \pi + D, \quad 2\pi + D, \quad 3\pi + D \quad \text{etc.}$$

Pro arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D eritque

$$\frac{2ab}{gss} = e^{\frac{Da}{2Bk}}$$

seu abscissa arcus MC

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}.$$

Abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae semioscillationis erit

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}.$$

Simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(2\pi + D)}{2Bk}}.$$

Atque generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione, quae indicatur per $n+1$, est

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi + D)}{2Bk}},$$

quae simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione, quae indicatur numero n. Quod ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reservamus. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolvi non possunt, quia finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$. At si $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes perpetuo durabunt, quia expressio

$$\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi + D)}{2Bk}}$$

neque evanescere neque negativa fieri potest.

COROLLARIUM 2

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ascensus in data ratione; est enim abscissarum ratio

$$\frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}} \quad \text{ad} \quad \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}$$

ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendet a celeritate data $\sqrt{b}$.

COROLLARIUM 3

576. Atque simili modo arcus descensus primae semioscillationis ad arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae datam habet rationem; est enim haec ratio ut $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus semioscillationum duplo fit maior, haec ratio fit duplicata.

COROLLARIUM 4

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum se insequentium constituunt progressionem geometricam decrescentem in ratione 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$. Atque ideo integri etiam arcus semioscillationibus descripti erunt in progressione geometrica eiusdem denominatoris.

SCHOLION 1

578. Quia autem pro D infiniti arcus accipi possunt, quo appareat, quinam ex iis pro arcu descensus accipi debeat, sumo casum, quo $k = \frac{a}{8g}$ atque arcus ascensus $= \frac{4\sqrt{kb}}{e}$ seu eius abscissa

$$= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g} e^{-2};$$

hoc autem casu est $B = 0$ atque abscissa arcus ascensus

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}.$$

Debet ergo esse

$$\frac{a(\pi + D)}{2Bk} = 2 \quad \text{et} \quad \pi + D = \frac{4Bk}{a} = 0.$$

Est vero $\frac{4Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ sit $= 0$, debet $\pi + D$ esse $= 0$. Ex quo intelligitur $\pi + D$ esse minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondentem. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondens E; erit $D = E - \pi$. Quocirca in prima semioscillatione erit abscissa arcus descensus

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{a(\pi - E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$$

ideoque ipse arcus MC

$$= e^{\frac{a(\pi - E)}{4Bk}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

Ponatur $\frac{4Bk}{a}$ seu tangens arcus $E = \tau$; erit arcus descensus primae semioscillationis

$$= e^{\frac{\pi - E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}},$$

arcus ascensus primae seu arcus descensus secundae semioscillationis

$$= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$$

atque arcus descensus in semioscillatione, quae indicatur numero $n + 1$, erit

$$= e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}},$$

qui est simul arcus ascensus in semioscillatione numero n indicata. Progressionis geometricae ergo, quam hi arcus ascensus constituunt, denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

COROLLARIUM 5

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in puncto infimo C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero n indicatur, celeritas in C debita altitudini β; erit arcus ascensus

$$= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2a\beta}{g}},$$

qui aequalis esse debet ipsi

$$e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

Hinc fit

$$\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}.$$

Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successivis progressionem geometricam quoque constituunt, cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

COROLLARIUM 6

580. Si n ponatur numerus negativus, semioscillationes, quae ante primam factae esse possent, cognoscuntur; ut in semioscillatione primam praecedente arcus descensus esse debuisset

$$= e^{\frac{2\pi-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

COROLLARIUM 7

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex puncto cycloidis supremo A, erit arcus descensus $= a$. Quare est

$$\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi-E}{\tau}}$$

et celeritas in puncto infimo C seu $\sqrt{b}$ erit

$$e^{\frac{E-\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}.$$

COROLLARIUM 8

582. Si resistentia fere evanescat seu k fuerit quantitas vehementer magna, erit

$$B = \sqrt{\frac{ga}{2k}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}.$$

Cum igitur sit τ valde magnum, erit $E = \frac{\pi}{2}$ atque arcus descensus primae semioscillationis

$$= e^{\frac{\pi}{2\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}} = \left(1 + \frac{\pi}{2\tau}\right) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$$

et arcus ascensus

$$= \left(1 - \frac{\pi}{2\tau}\right) \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

SCHOLION 2

583. Ex solutione huius propositionis inter cetera intelligi potest, quanta circumspectione saepe opus sit ad conclusiones ex aequationibus deducendas. Nam in casu $k < \frac{a}{8g}$ aequationes, quas pro descensu et ascensu invenimus, ita sunt comparatae, ut ex iis sequi videatur arcum ascensus aequalem esse arcui descensus; nam facto $v = 0$ ex utraque aequatione prodit

$$\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

Atque hoc ita se quoque haberet, nisi descensus necessario faceret $b = 0$. Posito autem $b = 0$ nullus datur ascensus et aequatio pro descensu prorsus est immutanda. Quare nisi ex casu, quo $k = \frac{a}{8g}$, advertissemus b esse $= 0$, difficulter ex aequatione veritas cognosci potuisset. Idem quoque accidit, ubi in eadem hypothesi $k < \frac{a}{8g}$ descensu ex dato puncto facto celeritatem in puncto C investigavimus; posito enim $s = 0$ aequatio ad absurdum deduxit. Ita enim est comparata illa aequatio, ut facto $s = 0$ non ostendat esse quoque $v = 0$, etiamsi revera sit $v = 0$; ii enim tantum termini sunt neglecti, in quibus reperiebatur s, cum reliqui v continentes eodem iure negligi debuissent. Inveniri ergo non potest esse $v = 0$, si $s = 0$; sed quia ex aequatione absurdum sequitur, nisi esset $v = 0$, ex hoc concludi potest esse $v = 0$, si $s = 0$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspicitur, difficulter lapsus evitari poterit.

PROPOSITIO 66

THEOREMA

584. *In medio uniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, omnes descensus super cycloide AMC* (Fig. 66, p. 255) *fiunt aequalibus temporibus atque similiter etiam omnes ascensus super cycloide CNB aequalibus temporibus absolvuntur, si quidem potentia sollicitans fuerit uniformis et deorsum directa.*

DEMONSTRATIO

Pro descensu, si dicatur arcus $CM = s$ et altitudo debita celeritati in $M = v$, habetur ista aequatio

$$dv = -\frac{gs\,ds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur $\sqrt{v} = u$; erit u ut ipsa celeritas in M atque ob $dv = 2u\,du$ habetur ista aequatio

$$2u\,du = -\frac{gs\,ds}{a} + \frac{u\,ds}{\sqrt{k}},$$

in qua u et s ubique eundem tenent dimensionum numerum. Quare si ponatur initium descensus in E et arcus $CE = f$ et integretur aequatio proposita, ita ut fiat $u = 0$ posito $s = f$, prodibit aequatio integralis, in qua u, f et s ubique eundem dimensionum numerum constituunt. Ex hac igitur aequabitur u functioni unius dimensionis ipsarum f et s. Quocirca elementum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsarum f, s atque elementi ds. Eius ergo integrale ita acceptum, ut evanescat posito $s = 0$, erit functio quoque nullius dimensionis ipsarum f et s et exhibebit tempus per arcum CM. In hac igitur functione si ponatur $s = f$, evanescet f ubique ex ea functione aequabiturque tempus totius descensus per EC functioni ex quantitatibus constantibus g, a et k tantum compositae, in quam neque f neque alia quantitas punctum E respiciens ingredietur. Quamobrem tempus descensus per EC eadem exprimetur quantitate, ubicunque punctum E accipiatur, atque ideo omnes descensus aequalibus absolventur temporibus. Si in formula tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco $\sqrt{k}$, prodibit tempus ascensus in arcu CNB, quod propterea quoque erit constans, quantuscunque fuerit arcus ascensu percursus. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

585. Quia u aequalis est functioni unius dimensionis ipsarum f et s, aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s. Quare si ponatur $s = nf$, aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inerit f. In variis ergo descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum erunt ipsis arcubus f proportionales.

COROLLARIUM 2

586. Cum in descensu maxima celeritas sit, ubi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, invenietur punctum O seu arcus CO ex aequatione, in qua f et s ubique eundem dimensionum numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f proportionalis. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae quam arcus CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

COROLLARIUM 3

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s, tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum f et s seu etiam ipsius f et arcus EM.

COROLLARIUM 4

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum, sed etiam tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inter se aequalia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

COROLLARIUM 5

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam omnes ascensus, etiam omnes semioscillationes aequalibus absolventur temporibus. Atque in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscillationes continuat, omnes absolventur temporibus aequalibus.

COROLLARIUM 6

590. Cyclois ergo, quae est curva tautochrona in vacuo, eandem proprietatem retinet in medio, quod resistit in simplici ratione celeritatum.

Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in medio, cuius resistentia est constans seu momentis temporum, ut NEUTONUS loquitur, proportionalis (§ 570).

SCHOLION 1

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum NEUTONUS quoque demonstravit in *Princ. Phil.*[1]), atque quod ad resistentiam ipsis celeritatibus proportionalem attinet, ex hoc demonstrationem formavit, quod in diversis descensibus, si arcuum partes totis arcubus proportionales accipiantur, in iis locis celeritates sint totis arcubus quoque proportionales. Nam si celeritates totis arcubus fuerint proportionales, si elementa quoque capiantur totis arcubus proportionalia, tempora per ea erunt inter se aequalia.

SCHOLION 2

592. Etsi autem ex his appareat tempora tam ascensuum quam descensuum inter se esse aequalia, tamen determinari non potest, quantum sit tempus sive descensuum sive ascensuum, neque etiam tempora descensuum et ascensuum inter se possunt comparari. Aequatio enim relationem inter s et u definiens ita est complicata, ut ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$ per unicam variabilem non possit exprimi. Praeterea oscillationes infinite parvae, quae ante in determinandis temporibus calculum valde facilem reddiderunt, in hac resistentiae hypothesi nihil adiuvant. Nam etiam si arcus totus descriptus ponatur infinite parvus, in aequatione

$$l\frac{\sqrt{2ac^2\sqrt{k}}}{\sqrt{(2au^2\sqrt{k}-aus+gss\sqrt{k})}}=\frac{a}{4Bk}\,At.\,\frac{4Bks}{as-4au\sqrt{k}},$$

quae ex superiori integrata oritur, ne unicus quidem terminus evanescit prae ceteris. Pendebit autem tempus ascensus a quantitatibus a, k et g; at quomodo ex his sit compositum, non liquet. Interim tamen hoc certum est, quo maior sit g ceteris paribus, eo minus esse tempus, at crescente a tempus quoque crescere, k vero crescente diminui, quia resistentia fit minor. In hac igitur resistentiae hypothesi resistentia in motibus tardissimis non evanescit,

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. II propositiones XXV et XXVI. P. St.

quemadmodum in resistentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo consequi videtur, si resistentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione crescat, in motibus tardissimis resistentiam negligi posse, at si resistentia fuerit in minore ratione, etiam in motibus tardissimis resistentiam considerari debere.

PROPOSITIO 67

PROBLEMA

593. *In medio uniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, cuius exponens est* $2m$, *determinare motum corporis super curva* CMA (Fig. 66, p. 255), *in qua arcus quisque* CM *proportionalis est potestati abscissae* CP, *cuius exponens est* $1-m$.

SOLUTIO

Positis abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit

$$ds = \frac{a^m dx}{x^m}.$$

Sit celeritas in M debita altitudini v; erit resistentia in $M = \frac{v^m}{k^m}$ atque ideo, si corpus descendere ponatur super arcu CM, habebitur ista aequatio

$$dv = -g dx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}.$$

Pro ascensu autem super eadem curva inservit ista aequatio

$$dv = -g dx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}.$$

Utraque vero aequatio separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit enim pro descensu

$$x dt = -t dx - g dx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}$$

seu

$$\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) - a^m t^m} = \frac{dx}{x}$$

atque pro ascensu haec aequatio

$$\frac{-k^m dt}{k^m(g+t)+a^m t^m}=\frac{dx}{x}.$$

In quibus aequationibus variabiles t et x a se invicem sunt separatae, ita ut t per x ope quadraturarum possit determinari. Constans in integratione addenda definiri debet vel ex data celeritate in puncto C vel ex loco curvae, in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur. Si ponatur abscissa toti arcui descensus vel ascensus respondens f, aequalis erit v functioni unius dimensionis ipsarum f et x tam in descensu quam ascensu propter aequationes differentiales homogeneas. Hanc ob rem $\sqrt{v}$ aequabitur functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x. Tempus igitur descensus per MC, quod est

$$=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=a^m\int\frac{dx}{x^m\sqrt{v}},$$

aequale erit functioni $\frac{1}{2}-m$ dimensionum ipsarum f et x. Quia autem posito $x=f$ prodit tempus totius descensus ut $f^{\frac{1}{2}-m}$, ei etiam proportionale est tempus totius ascensus, si quidem f abscissam arcus totius ascensus designat. Si ponatur totus arcus vel descensus vel ascensus $=A$, quia est A ut f^{1-m}, erit tempus totum vel ascensus vel descensus ut $\frac{A}{f^{\frac{1}{2}}}$ vel ut $A^{\frac{1-2m}{2-2m}}$. Plurium ergo descensuum tempora sunt in ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$-multiplicata totorum arcuum descriptorum. Atque in eadem ratione sunt quoque tempora ascensuum inter se; sed tempora ascensuum et descensuum inter se non comparantur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

594. Quia celeritas seu $\sqrt{v}$ aequalis est functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x, in pluribus descensibus celeritates in puncto C acquisitae sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus corpus descendit. Atque altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, sunt in duplicata ratione celeritatum initialium in C.

COROLLARIUM 2

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint ut $f^{\frac{1}{2}-m}$, omnes descensus aequalibus absolventur temporibus, si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothesi pariter tempora ascensuum inter se erunt aequalia. Curva autem erit cycloïs, ut ante ostendimus.

COROLLARIUM 3

596. Quia est $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$, erit

$$s=\frac{a^m x^{1-m}}{1-m}.$$

Ex quo perspicitur, nisi sit $m<1$, curvam AMC fore negativam seu, quod perinde est, imaginariam. Semper enim curva maior esse debet quam abscissa.

COROLLARIUM 4

597. Praeterea semper debet esse $ds>dx$; quare, quo hoc accidat, si $x=0$, debet m esse numerus positivus. Hinc nostra propositio requirit, ut m inter limites 0 et 1 contineatur.

COROLLARIUM 5

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a ibique erit $ds=dx$ seu tangens verticalis. Hocque loco curva habebit cuspidem; altius enim ascendere nequit, quia, si $x>a$, foret $ds<dx$, quod fieri nequit.

COROLLARIUM 6

599. Si m continetur intra limites 0 et 1, curva in C habebit tangentem horizontalem atque radius osculi in C erit

$$=\frac{sds}{dx}=\frac{a^{2m}x^{1-2m}}{1-m}$$

posito $x=0$. Quare radius osculi in C erit infinite parvus, si $m<\frac{1}{2}$, finitus, si $m=\frac{1}{2}$, et infinite magnus, si $m>\frac{1}{2}$.

COROLLARIUM 7

600. Tempora minimorum descensuum et ascensuum sunt infinite parva, si $m < \frac{1}{2}$, at finita, si $m = \frac{1}{2}\cdot$ Infinite magna denique erunt, si $m > \frac{1}{2}\cdot$ Tenent ergo radiorum osculi in infimo puncto C rationem.

SCHOLION

601. Habemus hic ergo exempla curvarum pro resistentia minorem quam duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus motus corporis potest determinari. At si medium in maiore quam duplicata ratione resistit, curva nusquam habebit tangentem horizontalem atque ideo descensus et ascensus nunquam finiri possunt. Quo autem in exemplo appareat, qualis sit motus corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratione celeritatum resistit, investigare lubet motum corporis super cycloide saltem in medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero resistentiae hypothesin prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seriem potest definiri.

PROPOSITIO 68

PROBLEMA

602. *In medio uniformi, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, determinare tam descensum quam ascensum corporis quemcunque super cycloide* ACB (Fig. 66, p. 255).

SOLUTIO

Posita potentia uniformi corpus perpetuo deorsum trahente g et abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit ex natura cycloidis $dx = \frac{s\,ds}{a}\cdot$ Sit celeritas in C debita altitudini b et in M altitudini v atque exponens resistentiae k; erit resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}\cdot$ Pro descensu ergo habebitur haec aequatio

$$dv = -g\,dx + \frac{v^2\,ds}{k^2} = -\frac{g\,s\,ds}{a} + \frac{v^2\,ds}{k^2},$$

at pro ascensu ista

$$dv = -\frac{g\,s\,ds}{a} - \frac{v^2\,ds}{k^2}.$$

Pro descensu ponatur

$$v = \frac{-k^2 dz}{z ds};$$

erit

$$dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$$

posito ds constante. Quamobrem habebitur

$$k^2 ddz = \frac{gszds^2}{a};$$

quae aequatio in seriem conversa dat

$$z = f + hs + \frac{fgs^3}{2\cdot 3\,ak^2} + \frac{hgs^4}{3\cdot 4\,ak^2} + \frac{fg^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\,a^2k^4} + \frac{hg^2s^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\,a^2k^4}$$
$$+ \frac{fg^3s^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\,a^3k^6} + \text{etc.}$$

Ad constantes f et h determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s = 0$; erit ergo

$$b = -\frac{k^2 h}{f}.$$

Et quia, si $s = 0$, est

$$dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2},$$

propter $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ erit

$$\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 h^2}{ff},$$

quae aequatio cum illa congruit; erit ergo $h = -\frac{bf}{k^2}$. Hoc substituto erit

$$v = \frac{b - \frac{gs^2}{2a} + \frac{bgs^3}{3ak^2} - \frac{g^2s^5}{2\cdot 3\cdot 5\,a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3\cdot 4\cdot 6\,a^2k^4} - \text{etc.}}{1 - \frac{bs}{k^2} + \frac{gs^3}{2\cdot 3\,ak^2} - \frac{bgs^4}{3\cdot 4\,ak^4} + \frac{g^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\,a^2k^4} - \text{etc.}}.$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur

$$v = \frac{b - \frac{gs^2}{2a} - \frac{bgs^3}{3ak^2} + \frac{g^2s^5}{2\cdot 3\cdot 5\,a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3\cdot 4\cdot 6\,a^2k^4} - \text{etc.}}{1 + \frac{bs}{k^2} - \frac{gs^3}{2\cdot 3\,ak^2} - \frac{bgs^4}{3\cdot 4\,ak^4} + \frac{g^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\,a^2k^4} + \text{etc.}}.$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus invenitur, si

ponatur $v=0$ atque valor ipsius s investigetur. Ut si k fuerit quantitas valde magna, erit arcus descensus, qui sit E,

$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{301a^2b^4\sqrt{g}}{450g^2k^4\sqrt{2ab}}+\text{etc.}^{1)}$$

At sequens arcus ascensus, qui sit F, erit

$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{301a^2b^4\sqrt{g}}{450g^2k^4\sqrt{2ab}}-\text{etc.}^{2)}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

603. Si ergo resistentia est quam minima, erit summa arcuum descensus et ascensus seu arcus una semioscillatione descriptus, i. e.

$$E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} \text{ quam proxime.}$$

COROLLARIUM 2

604. Differentia autem inter arcus ascensus et descensus, scilicet

$$E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}.$$

Quare differentia inter arcus descensus et ascensus est ut biquadratum summae arcuum.

1) Editio princeps:

$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}}+\text{etc.}$$

Evolvendo arcum s secundum potestates quantitatis $\frac{1}{k^2}$ EULERUS in serie

$$b=\frac{gs^2}{2a}-\frac{bgs^3}{3ak^2}+\frac{g^2s^5}{2\cdot 3\cdot 5a^2k^2}-\frac{bg^2s^6}{3\cdot 4\cdot 6a^2k^4}+\frac{g^3s^8}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8a^3k^4}-\text{etc.}$$

terminum

$$\frac{g^3s^8}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8a^3k^4}$$

neglexit hocque modo valorem coefficientis membri tertii vero fractione $\frac{1}{90}$ maiorem invenit. P. St.

2) Editio princeps: $=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}}-\text{etc.}$ Correxit P. St.

SCHOLION 1

605. Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus proportionalem esse biquadrato summae arcuum seu

$$E - F = \frac{g(E+F)^4}{60ak^2}.$$

Supra autem vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeritatum resistit, esse arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{3gk}$$

et arcum ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2ab}{3gk};$$

hinc erit

$$E + F = \frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} \quad \text{et} \quad E - F = \frac{4ab}{3gk} = \frac{(E+F)^2}{6k}$$

(§ 557). Quare in hac resistentia est differentia inter arcus ascensus et descensus ut quadratum summae arcuum. Atque in medio, quod in simplici ratione celeritatum resistit, si fuerit rarissimum, est

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$$

(§ 582). Quare erit

$$E - F = \frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}} = \frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}.$$

Seu differentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum proportionalis. Ex quo consequi videtur in medio quocunque rarissimo, quod resistit in $2m$-multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae arcuum ascensus et descensus, cuius exponens sit $2m$. Atque in hac resistentiae hypothesi coniectare licet fore arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m\,ab^m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)gk^m}$$

et arcum ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m\,ab^m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)gk^m}.$$

Unde fit

$$E - F = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m g^{m-1}(E+F)^{2m}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)\, 2^{2m-1} a^{m-1} k^m}.$$

Quoties ergo m est numerus integer seu $2m$ numerus par, assignari potest aequatio inter $E-F$ et $E+F$; at si m fuerit numerus fractus, valor fractionis $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}$ per methodum interpolationum, quam exhibui in Comment. Acad. Petrop. A. 1730[1]), investigari potest. Ex qua quidem constat, si $2m$ fuerit numerus impar, valorem huius fractionis involvere quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu, quo $2m = 1$, reppperimus.

SCHOLION 2

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attinet, esse differentiam inter arcus descensus et ascensus super cycloide in totuplicata ratione summae arcuum, in quotuplicata ratione celeritatum sit resistentia, si quidem fuerit minima, NEUTONUS in *Princ.* demonstravit[2]). Atque demonstrationem etiam ex ipsa aequatione

$$dv = -\frac{gsds}{a} \pm \frac{v^m ds}{k^m}$$

derivare licet. Ponatur enim

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q,$$

ubi Q erit quantitas valde parva prae b et $\frac{gs^2}{2a}$. Hanc ob rem habebitur

$$-\frac{gsds}{a} + dQ = \frac{-gsds}{a} + \frac{\left(b - \frac{gs^2}{2a}\right)^m ds}{k^m}$$

pro descensu seu

$$Q = \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

1) L. EULERI Commentatio 19 (indicis ENESTROEMIANI): *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/1), 1738, p. 36; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14. P. St.

2) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. II prop. XXXI. P. St.

hoc integrali ita accepto, ut evanescat posito $s=0$. Pro descensu ergo erit

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

et pro ascensu

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}.$$

Ponatur $v=0$, et quia tunc proxime est $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, ponatur

$$s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q;$$

erit

$$0 = \frac{-gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}$$

atque

$$q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m},$$

si quidem post integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipsius q valore ipsarum $\sqrt{b}$ et s sunt $2m$ dimensiones, habebit q huiusmodi formam Nb^m. Quocirca erit arcus descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$$

et arcus ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m.$$

Hinc ergo habebitur

$$E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m(E+F)^{2m}}{2^{3m-1}a^m}.$$

At numerus N obtinebitur ex formula

$$\sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \left(\frac{2ab - gss}{2abk}\right)^m ds,$$

si post integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec est demonstratio illius ipsius, quod in praecedente scholio ex inductione derivabamus. Erit enim N numerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmativus; at si

$2m$ fuerit numerus integer impar, inventio numeri N a quadratura circuli pendebit. Generaliter autem valor ipsius q cum hac expressione

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2mab^m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)gk^m}$$

congruit.

PROPOSITIO 69

PROBLEMA

607. *In medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, si detur corporis super curva AMC* (Fig. 67) *ex dato puncto A descendentis in singulis locis celeritas, invenire celeritatem eiusdem corporis descensum in quocunque alio puncto E incipientis.*

SOLUTIO

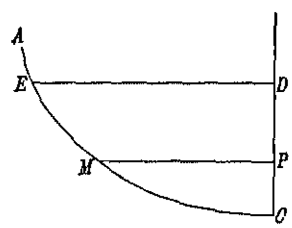


Fig 67.

Posito $CP = x$ et $CM = s$ sit corporis ex A delapsi celeritas in M debita altitudini u, quae quantitas u ergo per hypothesin datur per x et s. Iam si corpus descensum ex quocunque puncto E incipiat, sit celeritas in M debita altitudini v. Aequatio vero motum determinans erit

$$dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2},$$

quae dat valorem ipsius v, ubicunque descensus inceperit; erit ergo etiam

$$du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}.$$

Ponatur $v = u - q$; erit

$$du - dq = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2} - \frac{2qu\,ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2};$$

ex qua aequatione propter

$$du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$$

oritur

$$-dq = -\frac{2qu\,ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2} \quad \text{seu} \quad -\frac{dq}{q^2} + \frac{2u\,ds}{k^2 q} = \frac{ds}{k^2},$$

quae multiplicata per $e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}$ dat hanc integralem

$$e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} = cq + q\int\frac{e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds}{k^2},$$

ex qua prodit [mutata significatione litterae c]

$$q = \frac{k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds}.$$

Quocirca erit

$$v = u - \frac{k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds},$$

in qua aequatione integralia

$$\int\frac{u\,ds}{k^2} \quad \text{et} \quad \int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds$$

ita sint accepta, ut evanescant posito $s = 0$. Sit nunc altitudo celeritati in C debita $= a$, si descensus ex A fiat, at altitudo celeritati in C debita, si descensus ex E fit, $= b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur

$$v = u - \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds}.$$

Data ergo celeritate in C, nempe $\sqrt{b}$, invenietur punctum E, in quo descensus incepit, ex hac aequatione

$$u = \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds},$$

ex qua valor ipsius s dabit arcum CME. Quia igitur datur u per s, ex hac aequatione celeritas corporis ex quocunque alio puncto delapsi super curva AMC invenietur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

608. Si valor ipsius v ita immutetur, ut tam in numeratore quam in denominatore b sine coefficiente appareat, prodibit

$$v = \frac{\left(u\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}ds - k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\right)}{\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}ds} \cdot \frac{\left(b - a + \dfrac{k^2 u}{k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} - u\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}ds}\right)}{\left(b - a - \dfrac{k^2}{\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}ds}\right)}.$$

Atque erit $v = 0$, si est

$$a + \frac{k^2 u}{u\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}ds - k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}} = b.$$

COROLLARIUM 2

609. Quia est

$$du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -g\,dx,$$

erit huius aequationis per $e^{\frac{-\int u\,ds}{k^2}}$ multiplicatae integralis haec

$$u = ae^{\frac{\int u\,ds}{k^2}} - ge^{\frac{\int u\,ds}{k^2}}\int e^{\frac{-\int u\,ds}{k^2}}dx$$

integralibus ita sumtis, ut evanescant posito s vel $x = 0$. Vel etiam est

$$\frac{du}{u} + \frac{g\,dx}{u} = \frac{u\,ds}{k^2}$$

atque hinc

$$\int\frac{u\,ds}{k^2} = l\,\frac{u}{a} + \int\frac{g\,dx}{u}.$$

Quare erit

$$e^{\frac{\int u\,ds}{k^2}} = \frac{e^{\int\frac{g\,dx}{u}}u}{a};$$

unde dx loco ds in aequatione superiore potest introduci.

COROLLARIUM 3

610. Si resistentia fuerit quam minima, evanescet $\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} ds$ prae k^2 et ideo erit

$$v = u - (a-b)e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} = u - (a-b)\left(1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}\right)$$

propter k quantitatem maximam. Quamobrem erit

$$v = b + \frac{2b\int u\,ds}{k^2} - a - \frac{2a\int u\,ds}{k^2} + u = \left(1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}\right)\left(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}}\right).$$

COROLLARIUM 4

611. Cum autem sit

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}\right)} = 1 + \frac{\int u\,ds}{k^2},$$

erit elementum temporis

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2 + \int u\,ds)\sqrt{\left(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 + 2\int u\,ds}\right)}}.$$

Per aequationem autem

$$du = -g\,dx + \frac{u^2\,ds}{k^2}$$

est quam proxime

$$u = a - gx + \int \frac{(a-gx)^2\,ds}{k^2},$$

unde erit

$$\int u\,ds = \int (a - gx)\,ds$$

atque

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2 + \int (a-gx)\,ds)\sqrt{\left(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + \int (a-gx)^2\,ds}{k^2 + 2\int (a-gx)\,ds}\right)}}$$

$$= \frac{k^2\,ds}{(k^2 + \int (a-gx)\,ds)\sqrt{\left(b - \frac{gk^2 x - \int (a^2 - g^2x^2)\,ds}{k^2 + 2\int (a-gx)\,ds}\right)}}.$$

SCHOLION

612. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesibus excepta ea, quae est constans, hanc habet

praerogativam, ut corporis super quacunque curva moti celeritas in omnibus locis ex aequatione curvae possit definiri, ita haec resistentiae hypothesis in hoc prae reliquis excellit, quod ex dato unico descensu vel ascensu simul omnes descensus et ascensus possint determinari. In aliis enim resistentiis operatio, qua hic usi sumus, non succedit neque ad aequationem deducit, in qua indeterminatae a se invicem separari possunt. Hanc ob rem uti resistentia constans est simplicissima eamque sequitur ea, quae quadratis celeritatum est proportionalis, ita post has pro simplicissima resistentiae hypothesi est habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione celeritatum. Videtur quidem ex his parum commodi ad motum in hac resistentiae hypothesi definiendum obtineri, quia unus descensus tanquam datus accipitur, qui autem inventu aeque est difficilis ac quisque alius. At si plures descensus considerantur et inter se comparantur, aequatio

$$dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2}$$

reipsa tres variabiles implicat, nempe praeter v et s seu x celeritatem in puncto C, quae in variis descensibus variatur. Quare cum resolutionem huius aequationis ad hanc aequationem

$$du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$$

reduxerimus, quae ad unicum descensum spectat, illud incommodum trium variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope istius artificii plures descensus inter se comparari possunt, quod in aliis resistentiae hypothesibus ne quidem fieri potest. Atque hinc etiam multa problemata inversa pro hac resistentiae hypothesi resolvi possunt, quae in aliis omnino tractari nequeunt.

PROPOSITIO 70

PROBLEMA

613. *Si resistentia fuerit quam minima respectu potentiae sollicitantis absolutae et proportionalis potestati cuicunque celeritatum, determinare motum corporis super quacunque curva AM* (Fig. 68, p. 303).

SOLUTIO

Descendat corpus super curva AM descensus initio in A existente; ponatur super axe verticali abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$ et potentia per-

petuo deorsum trahens $= g$. Sit celeritas in M debita altitudini v et resistentia ibidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita ut resistentia sit proportionalis potestati exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit

$$dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m};$$

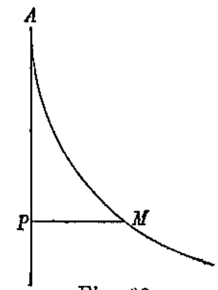


Fig. 68.

at quia resistentia ponitur valde parva, erit terminus $\frac{v^m\,ds}{k^m}$ vehementer exiguus atque propterea $v = gx$ quam proxime. Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m\,ds}{k^m}$; erit

$$v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m\,ds$$

atque simili modo adhuc propius

$$v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m\,ds + \frac{m\,g^{2m-1}}{k^{2m}}\int x^{m-1}\,ds\int x^m\,ds.$$

Quae integralia ita sunt accipienda, ut evanescant posito $x = 0$. Hinc ergo erit

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m\int x^m\,ds}{2\,k^m\,gx\sqrt{gx}} - \frac{m\,g^{2m}\int x^{m-1}\,ds\int x^m\,ds}{2\,k^{2m}\,g^2x\sqrt{gx}} + \frac{3\,g^{2m}(\int x^m\,ds)^2}{8\,k^{2m}\,g^2x^2\sqrt{gx}} + \text{etc.}$$

Atque tempus descensus per AM erit

$$= \int\frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2\,k^m}\int x^{-\frac{3}{2}}\,ds\int x^m\,ds \text{ quam proxime.}$$

At si descensus ad fixum punctum C (Fig. 67, p, 298) usque desideretur initio descensus ex puncto E facto, ponatur puncti E supra C altitudo verticalis $CD = a$, abscissa $CP = x$ et arcus $CM = s$; quibus positis hic casus ad superiorem reducetur, si ibi loco x ponatur $a - x$ et $-ds$ loco ds. Quare si altitudo celeritati in M debita vocetur v, erit

$$v = g(a-x) + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m\,ds + \frac{m\,g^{2m-1}}{k^{2m}}\int(a-x)^{m-1}\,ds\int(a-x)^m\,ds \text{ quam proxime.}$$

Haec vero integralia ita sunt accipienda, ut evanescant posito $x = a$. Atque tempus per arcum EM est

$$= -\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2\,k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}\,ds\int(a-x)^m\,ds \text{ quam proxime,}$$

ubi iterum omnia integralia ita sunt capienda, ut evanescant posito $x=a$. Simili modo, si corpus ex C super curva CME ascendat tanta celeritate, qua ad punctum E usque pertingere possit, eaedem aequationes locum habebunt, si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob rem erit

$$v=g(a-x)-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds+\frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int(a-x)^{m-1}ds\int(a-x)^m ds \text{ quam proxime}$$

atque tempus ascensus per ME

$$=-\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}-\frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds \text{ quam proxime,}$$

omnibus his integralibus quoque ita acceptis, ut evanescant posito $x=a$. Atque hoc modo tam descensus corporis super curva quacunque quam oscillationes super curva idonea in medio rarissimo poterunt determinari. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

614. Apparet ex his, quod quidem per se intelligitur, si corpus in medio resistente super curva AM (Fig. 68, p. 303) descendat, fore celeritatem in M minorem, quam si corpus in vacuo super eadem curva descendisset. Atque tempus in medio resistente maius est quam tempus descensus per AM in vacuo.

COROLLARIUM 2

615. Altitudo celeritati in puncto infimo C (Fig. 67, p. 298) debita prodibit, si in expressione ipsius v ponatur $x=0$. Hoc autem facto fit

$$v=ga+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds \text{ quam proxime}$$

posito post integrationem supra praescripto modo peractam $x=0$. At si $\int(a-x)^m ds$ ita capiatur, ut evanescat posito $x=0$, tum erit in puncto C

$$v=ga-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds,$$

si post integrationem ponatur $x=a$. Id quod ad descensum pertinet.

COROLLARIUM 3

616. At pro ascensu celeritas corporis in C, qua ad E usque ascendere valet, debita erit altitudini

$$=ga+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds,$$

si hoc integrale ita accipiatur, ut evanescat posito $x=0$, atque post integrationem ponatur $x=a$.

COROLLARIUM 4

617. Sit altitudo debita celeritati corporis in $C=b$, quam iam descendendo per EMC acquisivit et qua iterum super eadem curva ascendet; ponatur altitudo DC descensu percursa ut ante a et altitudo, ad quam ascensu pertinget, $a-d$; erit d quantitas valde parva atque ideo

$$b=ga-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds=ga-gd+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$$

et

$$d=\frac{2g^{m-1}}{k^m}\int(a-x)^m ds$$

vel etiam

$$d=\frac{2ga-2b}{g}.$$

COROLLARIUM 5

618. Quia tempus descensus per EM est

$$=-\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}+\frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds$$

his integralibus ita acceptis, ut evanescant posito $x=a$, erit tempus per MC

$$=\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}-\frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds,$$

si integralia ita accipiantur, ut evanescant posito $x=0$. Atque simili modo in ascensu erit tempus per CM

$$=\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}+\frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds.$$

COROLLARIUM 6

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus per CME habebitur, si in his posterioribus formulis ponatur post integrationem $x = a$.

SCHOLION

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis super data curva inveniendum pertinent, progredior ad quaestiones inversas, in quibus ex aliis datis, quae incognita sunt, investigantur. Et primum quidem occurrunt huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis seu scala celeritatum datur et curva quaeritur, quae motum illi scalae convenientem producat in medio quocunque resistente; potentiam vero absolutam ut hactenus constantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71

PROBLEMA

621. *In medio, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, invenire curvam AM (Fig. 69), super qua corpus descendat, ut in singulis punctis M celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis sit applicatae respondenti PL datae curvae BL.*

SOLUTIO

Posita $AP = x$ et $PL = v$ dabitur aequatio inter x et v propter curvam BL datam. Iam sit arcus $AM = s$ et exponens rationis multiplicatae celeritatum $2m$, cui resistentia est proportionalis; quibus positis erit

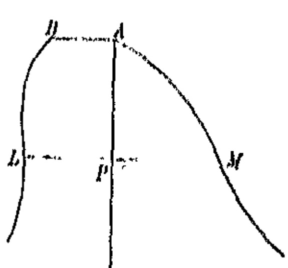


Fig. 69

$$dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$$

denotante g potentiam uniformem deorsum trahentem et k exponentem resistentiae. Ex hac igitur aequatione est

$$ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}.$$

quae, quia v per x dari ponitur, variabiles habet a se invicem separatas atque idcirco sufficit ad curvam quaesitam AM construendam. At quia ds semper maius esse debet quam dx, ne curva AM fiat imaginaria, oportet, ut sit $gk^m dx - k^m dv > v^m dx$ seu

$$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}.$$

Namque ubi est

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m},$$

ibi curvae AM tangens fit verticalis; et ubi

$$dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m},$$

ibi curva AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

622. Cum, ubi curvae BL tangens est verticalis, sit $dv = 0$, erit in loco respondente curvae AM

$$ds = \frac{gk^m dx}{v^m},$$

in quo puncto corpus descendens maximam vel minimam habebit celeritatem. Ne igitur hoc curvae AM punctum sit imaginarium, oportet sit $gk^m > v^m$ seu $v < k\sqrt[m]{g}$.

COROLLARIUM 2

623. Si curva BL alicubi incidat in axem AP, ut ibi sit $v = 0$, erit in loco curvae AM respondente $ds = \infty$, si quidem m fuerit numerus affirmativus. Hoc ergo loco curva AM habebit tangentem horizontalem, in quam curva desinet.

COROLLARIUM 3

624. Habeat curva AM alicubi tangentem horizontalem; evanescet illo loco dx prae ds. Quamobrem erit

$$ds = \frac{-k^m dv}{v^m}.$$

Ex quo apparet in loco curvae BL respondente applicatas decrescere debere atque ibi curvae BL tangentem fore horizontalem, quia dv infinities quoque maius erit quam dx.

COROLLARIUM 4

625. Curvae AM tangens, ut vidimus, est verticalis, ubi est

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}.$$

Quo igitur curva in initio A, ubi celeritas sit nulla, habeat tangentem verticalem, oportet, ut ibi sit $dv = gdx$ seu $v = gx$. Hoc ergo casu tangens anguli, quem curva BL in A cum AP constituet, erit $= g$.

COROLLARIUM 5

626. Cum sit

$$ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

erit elementum temporis

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Quocirca tempus descensus per AM erit

$$= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}.$$

SCHOLION 1

627. Si curva BL super AB ascenderet, tum curva AM quoque sursum vergeret atque loco descensus problemati satisfaceret ascensus super illa curva. Fit enim hoc casu abscissa x negativa ideoque et eius elementum dx; quamobrem habebitur ista aequatio

$$ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

quae oritur ex aequatione

$$dv = -g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$$

naturam ascensus continente. Simili modo, si curva BL ita est comparata, ut rursus ascendat, tum curva AM quoque sursum dirigetur et partim descensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

EXEMPLUM 1

628. Si quaeratur curva AM, super qua corpus aequabiliter moveatur, celeritate scilicet altitudini b debita, erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit

$$ds = \frac{gk^m dx}{b^m}.$$

Unde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet, fore $= \frac{b^m}{gk^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP, atque si fuerit $b^m = gk^m$, tum linea quaesita ipsa erit verticalis AP. At si b^m maior proponeretur quam gk^m, tum solutio perduceret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior sinu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM descensu absolvitur, erit

$$= \frac{gk^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}.$$

EXEMPLUM 2

629. Quaeratur curva AM, super qua corpus ita descendat, ut eius celeritas in singulis punctis sit ut radix quadrata ex altitudine AP, quae est proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$ et $dv = \alpha dx$ hisque substitutis habebitur

$$ds = \frac{gk^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m} \quad \text{et} \quad s = \frac{(g-\alpha) k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m},$$

ubi constantis additione non est opus, si $m < 1$. At si $m = 1$, curva est tractoria super linea horizontali per A transeunte descripta; super qua corpus ab infinita distantia, concursu scilicet tractoriae cum asymtoto, descensum incipit. Simili modo, si $m > 1$, curva formam habebit tractoriae similem. Semper autem esse debet $\alpha < g$; ex quo perspicitur corpus in medio resistente non tantam acquirere posse celeritatem quantam in vacuo. Deinde

quia ds maius esse debet quam dx, erit $(g-\alpha)k^m > \alpha^m x^m$; corpus igitur profundius descendere nequit quam per altitudinem

$$=\frac{k}{\alpha}\sqrt[m]{(g-\alpha)};$$

quo loco curvae tangens erit verticalis curvaque punctum reversionis habebit. Tempus autem, quo corpus per arcum AM descendit, est

$$=\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha x}}=\frac{2(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)\alpha^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Quare nisi sit $m<\frac{1}{2}$, tempus non potest esse finitum, sed est infinite magnum; nam si $m=\frac{1}{2}$, curva erit cyclois deorsum versa, super cuius vertice A corpus perpetuo permanebit.

COROLLARIUM 6

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non ultra datum punctum posse continuari, ita ut celeritates semper sint in subduplicata ratione altitudinum.

COROLLARIUM 7

631. Ex his apparet omnes curvas hoc modo inventas habere in A tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in A est finitae magnitudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi fit infinite parvus, quod evenit, si $m<\frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit; id quod ex eo, quod tempus fit finitum, intelligitur.

SCHOLION 2

632. Si corpus ex A descensum incipiat atque curvae AM in A tangens non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia est nulla; erit ergo ibi $dv=gdx$. Quamobrem quo loco AM curva prodeat non habens in A tangentem horizontalem, curva BL, quae in A conveniet cum AP, ita debet esse comparata, ut in ipso initio sit $v=gx$; seu tangens curvae BL in A cum axe AP angulum constituere debet, cuius tangens sit $=g$; alioquin enim curva AM non angulum acutum cum AP conficeret. Magis autem

descendendo semper esse debet $v < gx$; in medio enim resistente celeritas ex quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur; quia enim linea verticalis est brevissima et citissime descensu absolvitur, corpus quam minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curva BL ita debet esse comparata, ut v ubique sit minor quam altitudo debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Ubi enim v hanc altitudinem superat, ibi curva AM fit imaginaria.

SCHOLION 3

633. Simili modo res se habet, si pro ascensu detur curva BLD (Fig. 70), cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corporis ascendentis super curva invenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP = x$, $PL = v$ et $AM = s$ erit

$$ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}.$$

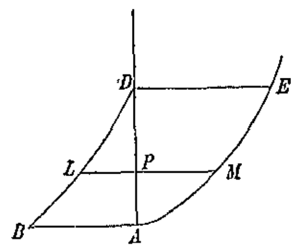


Fig. 70.

Ne igitur ds sit negativum, oportet, ut dv habeat valorem negativum, i. e. ut curva BL continuo ad axem AD convergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curvae BL ubique cum axe AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $= g$. Neque vero hoc sufficit, sed praeterea $-dv - gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$ seu

$$-dv > \frac{(gk^m + v^m)dx}{k^m},$$

sive differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Haec postrema conditio huc redit, ut PL sit minor quam altitudo debita celeritati, quam corpus in P haberet, si ex A celeritate altitudini AB debita per AP ascendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. In ipso autem puncto D angulus ADB tantus esse debet, ut eius tangens sit $= g$, quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus evanescit; sin vero iste angulus esset maior, curva AME in E tangentem haberet horizontalem, uti in praecedente scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72

PROBLEMA

634. *Si detur curva AM (Fig. 71), super qua corpus in vacuo moveatur, invenire curvam am, super qua corpus in medio resistente ita descendat, ut celeritas in a aequalis sit celeritati in A et sumtis arcubus AM et am aequalibus ut celeritates in singulis punctis M et m sint quoque aequales.*

SOLUTIO

Ductis axibus verticalibus AP et ap et horizontalibus MP, mp sit $AM = am = s$, $AP = t$ et $ap = x$; propter curvam AM datam dabitur aequatio inter s et t. Iam sint celeritates in punctis A et a debitae altitudini b et celeritates in M et m debitae altitudini v. Sit potentia absoluta deorsum sollicitans g et resistentia ut potestas exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit pro motu in vacuo super curva AM

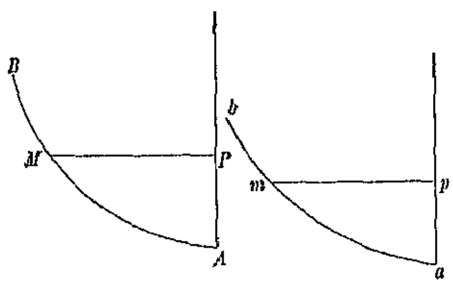


Fig. 71.

$$dv = -g\,dt \quad \text{seu} \quad v = b - gt$$

et pro descensu in medio resistente super curva ma erit

$$dv = -g\,dx + \frac{v^m ds}{k^m};$$

in qua aequatione si loco dv et v substituantur valores ex priori aequatione inventi, prodibit

$$-g\,dt = -g\,dx + \frac{(b-gt)^m ds}{k^m} \quad \text{seu} \quad dx = dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}.$$

Quia autem datur aequatio inter t et s, si loco t eius valor in s substituatur, habebitur aequatio inter x et s pro curva quaesita am. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

635. Si in curva AM punctum B fuerit initium descensus ideoque eius altitudo supra $A = \frac{b}{g}$, habebitur quoque in curva am initium descensus b sumendo arcum $amb = AMB$.

COROLLARIUM 2

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$; quare altitudo ap maior erit quam altitudo AP; in medio enim resistente maiore opus est altitudine ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

COROLLARIUM 3

637. Quia in curvis AM et am sumtis aequalibus arcubus celeritates in illis locis sunt aequales, tempora quoque, quibus aequales arcus AM et am describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per bma aequale est tempori descensus in vacuo per BMA.

COROLLARIUM 4

638. Ne curva bma fiat imaginaria, oportet, ut sit ubique $dx < ds$. Hanc ob rem debet esse

$$dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m} < ds \quad \text{seu} \quad gk^m dt < gk^m ds - (b-gt)^m ds.$$

Hoc autem ita se habet, si fuerit

$$gk^m dt < (gk^m - b^m) ds,$$

qui est casus, si t evanescit et pertinet ad punctum a, nisi t alicubi habeat valorem negativum. Quocirca ad hoc tantum est respiciendum, ut punctum a fiat reale, quod evenit, si $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m - b^m) ds$.

COROLLARIUM 5

639. Ne igitur curva am fiat imaginaria, ante omnia necesse est, ut sit $b < k\sqrt[m]{g}$. Sit in puncto A $ds = \alpha dt$; erit α numerus unitate maior et ideo erit

$$gk^m < \alpha(gk^m - b^m) \quad \text{seu} \quad b < k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}.$$

Si ergo curva MA in A habeat tangentem horizontalem, debet esse $b < k\sqrt[m]{g}$ propter $\alpha = \infty$.

COROLLARIUM 6

640. Sit autem, si fuerit $ds = \alpha dt$ in puncto A,

$$b^m = \frac{g(\alpha - 1)}{\alpha} k^m;$$

erit in ipso puncto a

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha - 1)\,ds}{\alpha} = ds.$$

Hoc ergo casu curva am in a tangentem habebit verticalem.

COROLLARIUM 7

641. In initio motus in B fit $b = gt$ seu $t = \frac{b}{g}\cdot$ Pro puncto b igitur erit $dx = dt$ curvarum elementis sumtis aequalibus. Quare tangentes in punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

SCHOLION 1

642. Quia curva am non absolute ex curva AM construi potest, sed praeterea nosse oportet celeritatem in puncto A seu descensus initium B, si in curva AM aliud descensus initium accipiatur, alia invenietur curva am. Curvae ergo BMA et bma ratione unici descensus tantum ita congruunt, ut celeritates aequalibus percursis spatiis sint inter se aequales, et si in aliis punctis initia descensus ponantur, haec convenientia non amplius locum habebit. Non igitur dantur duae curvae, super quibus descensus omnes ad datum punctum usque inter se congruant, altera in vacuo, altera in medio resistente constituta.

EXEMPLUM 1

643. Sit AMB linea recta utcunque inclinata, ita ut sit $s = \alpha t$, et quaeratur curva amb, super qua corpus simili modo progrediatur in medio resistente quo super AMB in vacuo. Posito autem $\frac{s}{\alpha}$ loco t prodibit sequens aequatio inter x et s pro curva quaesita amb

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha b - gs)^m}{g\alpha^m k^m} ds,$$

cuius integralis est

$$x = \frac{s}{\alpha} + \frac{\alpha b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} - \frac{(\alpha b - gs)^{m+1}}{(m+1)g^2 \alpha^m k^m}.$$

Ne punctum a fiat imaginarium, oportet, ut

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{b^m}{gk^m}<1.$$

Nam si fuerit

$$b^m=\frac{(\alpha-1)gk^m}{\alpha},$$

curva in a habebit tangentem verticalem neque propterea b maiorem habere poterit valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta altitudine descendisse, ut fiat

$$b=k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}};$$

erit

$$dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(k\sqrt[m]{g\alpha^{m-1}(\alpha-1)}-gs)^m ds}{g\alpha^m k^m},$$

quae est aequatio pro curva amb, in qua initium descensus in b est capiendum, ubi est $ds=\alpha dx$, seu arcus amb erit

$$=k\sqrt[m]{\frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{g^{m-1}}}.$$

Si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=1$ ideoque

$$dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(gk(\alpha-1)-gs)ds}{g\alpha k}=ds-\frac{sds}{\alpha k}$$

et integrando

$$x=s-\frac{ss}{2\alpha k}.$$

Quae est aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli generatoris diameter est $\frac{\alpha k}{2}$.

COROLLARIUM 8

644. Sit ergo super basi horizontali CB (Fig. 72, p. 316) descripta cyclois AMB circulo generatore ANC et sit medium resistens in duplicata ratione celeritatum, cuius exponens sit $=k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda $AN=\frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM et ex M tangens MT atque duo

corpora ponantur descendere, alterum super MT in vacuo et alterum super curva MB in medio resistente, ambo haec corpora aequalibus temporibus aequalia spatia absolvent.

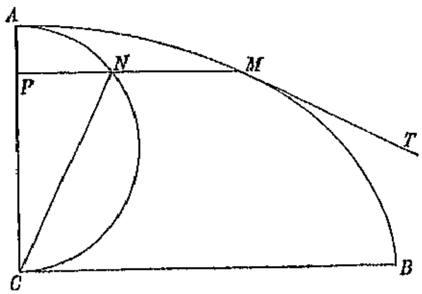


Fig. 72.

EXEMPLUM 2

645. Sit curva AMB (Fig. 71, p. 312) cycloïs deorsum spectans, cuius circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$ atque $dt = \frac{sds}{a}$. His ergo substitutis prodibit pro curva amb sequens aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m};$$

vel si totus arcus AMB, qui in vacuo descensu absolvi ponitur, vocetur c, erit $b = \frac{gcc}{2a}$ ideoque pro curva amb orietur ista aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1}(cc - ss)^m ds}{2^m a^m k^m}.$$

Ne igitur haec curva in puncto a fiat imaginaria, oportet sit $g^{m-1}c^{2m} < 2^m a^m k^m$, vel altitudo arcus AB minor esse debet quam $\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$; nam si fuerit altitudo arcus $AB = \frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$, tum curvae amb tangens in b erit verticalis. Si ergo B sit cuspis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ seu $c = a$, et si sit praeterea $g^{m-1}a^m = 2^m k^m$, quo curvae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur ista aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(aa - ss)^m ds}{a^{2m}};$$

quae curva in duobus punctis a et b habebit tangentes verticales.

COROLLARIUM 9

646. Cum igitur corpus in vacuo super cycloide ita descendat, ut eius accelerationes sint spatiis percurrendis proportionales, eandem proprietatem habebit descensus in medio resistente super curva bma, si initium descensus sumatur in puncto b, quod per aequationem ad curvam amb determinatur; erit scilicet $amb = c$.

COROLLARIUM 10

647. Si in curva AMB aliud descensus initium B capiatur, tota curva amb alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$ continetur. Quare, etiamsi cyclois sit curva tautochrona in vacuo, curva amb talis tamen non erit in medio resistente, quia pluribus descensibus super AMB totidem curvae diversae in medio resistente respondent.

SCHOLION 2

648. Curvae hoc exemplo erutae sunt eae ipsae, quas Clar. HERMANNUS in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis resistentibus invenit;[1]) sed simul ipse demonstravit eas quaesito satisfacere non posse. Ceterum ex his intelligitur simili modo in medio resistente curvam posse inveniri, super qua corpus ascendendo eodem modo moveatur quo super data curva in vacuo. Sint enim puncta A et a initia ascensus, illud in vacuo, hoc in medio resistente, sitque celeritas initialis debita altitudini b; habebitur pro curva amb ista aequatio

$$dx = dt - \frac{(b - gt)^m ds}{gk^m};$$

ex qua aequatione intelligitur curvam amb non fieri posse imaginariam, nisi ipsa curva AMB talis fuerit. Nam quia, ne curva amb sit imaginaria, esse debet $dx < ds$, hic dx minus est quam dt, quod per se minus est quam ds. Ut si linea AMB fit linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam posita $AB = c$ erit $b = gc$ et $s = t$; quare pro curva amb invenitur ista aequatio

$$dx = ds - \frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m},$$

1) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpora indesinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139. P. St.

cuius integralis est

$$x = s + \frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}.$$

Accommodetur haec aequatio ad resistentiam quadratis celeritatum proportionalem; fiet $m = 1$ ideoque erit

$$x = s + \frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k},$$

quae est ad cycloidem hoc modo: describatur cyclois AMB (Fig. 72, p. 316) circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$ super basi horizontali BC; tum capiatur arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si corpus super MA ascendat celeritate altitudini gc debita, in medio resistente in duplicata ratione celeritatum eodem modo movebitur quo in vacuo eadem celeritate initiali sursum ascendens verticaliter.

PROPOSITIO 73

PROBLEMA

649. *Si potentia fuerit uniformis et deorsum directa mediumque in ratione quacunque multiplicata celeritatum resistat, determinare curvam AM (Fig. 73), super qua corpus descendendo secundum horizontalem AH aequabiliter progrediatur.*

SOLUTIO

Sit A curvae punctum supremum, per quod ducatur axis verticalis AP, celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita altitudini b.

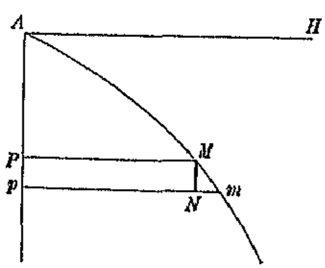


Fig. 73.

Sumatur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$ sitque corporis in M celeritas debita altitudini v, qua celeritate corporis elementum $Mm = ds$ percurret. Erit ergo ut ds ad dy ita corporis celeritas per Mm, quae est $\sqrt{v}$, ad celeritatem horizontalem $\sqrt{b}$, unde oritur

$$v = \frac{bds^2}{dy^2}.$$

Iam sit potentia sollicitans $= g$, exponens resistentiae $= k$ et ipsa

resistentia $=\frac{v^m}{k^m}$. His positis erit

$$dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m},$$

quae aequatio, si loco v valor $\frac{b\,ds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam curvae quaesitae. Sit autem $ds = p\,dy$; erit

$$v = bp^2 \quad \text{et} \quad dx = dy\sqrt{(p^2-1)}.$$

Quocirca habebitur

$$2bp\,dp = g\,dy\sqrt{(p^2-1)} - \frac{b^m p^{2m+1}\,dy}{k^m},$$

quae separata dat

$$dy = \frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2-1)} - b^m p^{2m+1}}.$$

Curvae igitur quaesitae sequens erit constructio: sumto

$$y = \int \frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2-1)} - b^m p^{2m+1}}$$

erit

$$x = \int \frac{2bk^m p\,dp\sqrt{(p^2-1)}}{gk^m\sqrt{(p^2-1)} - b^m p^{2m+1}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$ atque per v definiantur y et x, erit

$$y = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{(v-b)} - v^m\sqrt{v}} \quad \text{atque} \quad x = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{(v-b)}}{gk^m\sqrt{(v-b)} - v^m\sqrt{v}}.$$

Similique modo hinc erit arcus

$$s = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{v}}{gk^m\sqrt{(v-b)} - v^m\sqrt{v}}.$$

Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit

$$ds = \frac{dy\sqrt{v}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dy\sqrt{(v-b)}}{\sqrt{b}} \quad \text{atque} \quad ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}.$$

COROLLARIUM 2

651. Quia aequatio

$$dy = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$$

est separata, ex ea solutio particularis quaesito satisfaciens erui potest faciendo denominatorem

$$gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v} = 0,$$

unde erit ipsa celeritas $\sqrt{v}$ constans. Sit ergo $v = c$; erit $\sqrt{(v-b)} = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$ atque ideo

$$ds = \frac{gk^m dx}{gk^m}$$

pro linea recta inclinata, ut supra iam invenimus (§ 628).

COROLLARIUM 3

652. Quo autem corpus data celeritate, quae debita est altitudini b, horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\sqrt{(c-b)} = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$ definiri debet altitudo c. Qua inventa habebitur inclinatio rectae satisfacientis et celeritas corporis initialis $\sqrt{c}$ in A, qua aequabiliter per rectam descendet.

COROLLARIUM 4

653. Si resistentia evanescat corpusque in vacuo moveatur, fiet $k = \infty$ ideoque

$$x = \int \frac{dv}{g} \quad \text{seu} \quad v = g(a+x)$$

atque

$$dy = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(ga + gx - b)}}.$$

Integrando ergo fiet

$$y = \frac{2}{g} \sqrt{b(ga + gx - b)} - \frac{2}{g} \sqrt{b(ga - b)},$$

quae est aequatio pro parabola, quam corpus proiectum libere describit.

EXEMPLUM

654. Si medium fuerit rarissimum atque ideo k valde magnum, erit

$$\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}=\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}}+\frac{v^m\sqrt{v}}{g^2k^{2m}(v-b)} \text{ quam proxime.}$$

Hanc ob rem habebitur

$$y=\frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g}+\int\frac{v^m dv\sqrt{bv}}{g^2k^m(v-b)} \quad \text{et} \quad x=\frac{v}{g}+\int\frac{v^m dv\sqrt{v}}{g^2k^m\sqrt{(v-b)}}.$$

Ex hac posteriori aequatione est quam proxime

$$v=gx-\int\frac{g^m x^m dx\sqrt{gx}}{k^m\sqrt{(gx-b)}},$$

qui valor in aequatione

$$dy=\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}}$$

substitutus dat aequationem inter x et y pro curva quaesita.

PROPOSITIO 74

PROBLEMA

655. *Invenire curvam AM* (Fig. 74), *super qua corpus descendens in medio quocunque resistente aequabiliter deorsum progrediatur existente potentia absoluta uniformi et deorsum directa.*

SOLUTIO

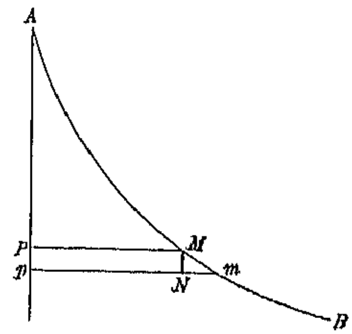


Fig. 74

Posita abscissa $AP=x$, $AM=s$ sit celeritas, qua corpus uniformiter descendere debet, debita altitudini b. Potentia porro uniformis deorsum directa sit g et altitudo debita celeritati in M $=v$ atque resistentia $=\frac{v^m}{k^m}$; erit ergo

$$dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}.$$

Debebit autem esse ut $Mm : MN=\sqrt{v}:\sqrt{b}$, unde erit $v=\frac{bds}{dx}$,

aequatione erit

$$ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{b}},$$

quo valore in aequatione substituto habebitur

$$dv = g\,dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}}\,dx}{k^m\sqrt{b}} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}.$$

Quamobrem erit

$$x = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}, \quad s = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{v}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}$$

atque applicata

$$PM = y = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{(v-b)}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}.$$

Ex quibus aequationibus constructio curvae quaesitae conficitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur aequatio ex x, y et s tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius v commodissime poterit inveniri, isque deinceps in alterutra reliquarum substitui.

COROLLARIUM 2

657. Quia aequatio

$$dx = \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}$$

indeterminatas a se invicem habet separatas, poterit solutio particularis obtineri ponendo

$$gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v} = 0.$$

Hinc igitur erit

$$v = g^{\frac{2}{2m+1}}\, k^{\frac{2m}{2m+1}}\, b^{\frac{1}{2m+1}}$$

ideoque

$$ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}}\, k^{\frac{m}{2m+1}}\, dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}.$$

Satisfacit ergo linea recta inclinata, si corpus data celeritate $\sqrt{v}$ super ea moveatur.

SCHOLION 1

658. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solutionem praebeat particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente recta inclinata inveniri possit, super qua corpus aequabiliter moveatur, ut supra (§ 628) ostendimus. Hic autem ipse casus utrique problemati satisfacit; si enim corpus super recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter quam verticaliter aequabiliter quoque promovetur; quin etiam secundum quamcunque plagam aequabiliter fertur.

COROLLARIUM 3

659. Pro vacuo fit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ seu $v = gx$ atque

$$ds = \frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx\sqrt{(gx-b)}}{\sqrt{b}},$$

quae aequatio integrata dat

$$y = \frac{2(gx-b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$$

et praebet parabolam cubicalem rectificabilem, ut supra [§ 258] iam invenimus.

EXEMPLUM 1

660. Ponamus resistentiam ipsis celeritatibus proportionalem; erit $m = \frac{1}{2}$ ideoque

$$x = \int \frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v} = \sqrt{bk}\, l \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v},$$

si initium abscissarum in eo puncto accipiatur, ubi v evanescit. Ex hac autem aequatione prodit

$$e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v} \quad \text{seu} \quad v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} - 1)g\sqrt{bk} = g\sqrt{bk}(1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}).$$

Valore hoc ipsius v substituto habebitur

$$ds = \frac{dx\sqrt{g(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})\sqrt{bk}}}{\sqrt{b}}.$$

Vel cum sit

$$ds = \frac{dv\sqrt{kv}}{g\sqrt{bk - v}},$$

ponatur $v = u^2$; erit

$$ds = \frac{2u^2 du\sqrt{k}}{g\sqrt{bk - uu}} = \frac{2gk\,du\sqrt{b}}{g\sqrt{bk - uu}} - 2du\sqrt{k},$$

quae integrata dat

$$s = \sqrt[4]{g^2bk^3}\, l\, \frac{\sqrt[4]{g^2bk} + \sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2bk} - \sqrt{v}} - 2\sqrt{kv},$$

in qua valor ipsius v ante inventus substitui potest, quo prodeat aequatio inter x et s.

EXEMPLUM 2

661. Resistat nunc medium in duplicata celeritatum ratione; erit $m = 1$ ideoque

$$dx = \frac{kdv\sqrt{b}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{kdv\sqrt{v}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}}.$$

Huius posterioris aequationis integrale est

$$s = \frac{2k}{3}\, l\, \frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}},$$

ex qua oritur

$$e^{\frac{3s}{2k}} = \frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}}$$

atque

$$v^{\frac{3}{2}} = gk\left(e^{\frac{3s}{2k}} - 1\right) e^{\frac{-3s}{2k}}\sqrt{b} = gk\left(1 - e^{\frac{-3s}{2k}}\right)\sqrt{b}.$$

Quocirca erit

$$\sqrt{v} = \sqrt[3]{gk\left(1 - e^{\frac{-3s}{2k}}\right)\sqrt{b}};$$

qui valor in aequatione $dx = \frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem inter s et x pro curva quaesita.

SCHOLION 2

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curvas determinavimus, super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deorsum aequabiliter feratur, ita simili modo problema resolvi potest, si corpus secundum

quamvis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestionem, quia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem causam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingo. Adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non parum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro mediis resistentibus; quod pro vacuo propositum ne problema quidem est. Quaeritur scilicet curva, super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus super quacunque curva motum in eodem loco semper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75

PROBLEMA

663. *Inter omnes curvas puncta A et C* (Fig. 75) *iungentes determinare eam AMC, super qua corpus ex A ad C descendens maximam acquirat celeritatem existente resistentia in quacunque multiplicata ratione celeritatum et potentia uniformi deorsum tendente.*

SOLUTIO

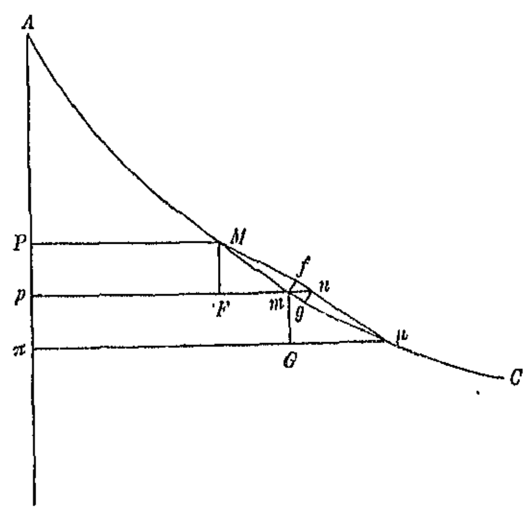


Fig. 75.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perveniat, curvae quaesitae AMC duo quaeque elementa Mm, $m\mu$ ita posita esse debent, ut corpus ea percurrendo maximum accipiat celeritatis incrementum. Nam si corpus per alia elementa Mn, $n\mu$ maius acquireret celeritatis augmentum, maiorem quoque in C habiturum esset celeritatem. Per methodum igitur maximorum positio elementorum Mm, $m\mu$ invenietur, si elementa haec cum proximis Mn, $n\mu$ comparentur et celeritatis augmenta, quae per utraque generantur, inter se aequalia ponantur. Ducantur ad hoc ad axem verticalem applicatae MP, nmp et $\mu\pi$ sintque

elementa axis Pp, $p\pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MF, mG et in curvae elementa normales mf, ng. Iam sit potentia sollicitans $= g$, exponens resistentiae $= k$, ipsa resistentia in $2m$-multiplicata ratione celeritatum et altitudo celeritati in M debita $= v$. His positis erit incrementum ipsius v per Mm

$$= g.MF - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}$$

et incrementum altitudinis celeritati debitae, dum corpus per $m\mu$ progreditur,

$$= g.mG - \frac{\left(v + g.MF - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}\right)^m m\mu}{k^m}.$$

Dum ergo corpus elementa Mm et $m\mu$ conficit, altitudo v accipit augmentum

$$= g(MF + mG) - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m} - \frac{\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mm\right)^m m\mu}{k^m}.$$

At elementa Mn, $n\mu$ percurrendo accipiet v augmentum

$$= g(MF + mG) - \frac{v^m \cdot Mn}{k^m} - \frac{\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn\right)^m n\mu}{k^m}.$$

Quibus sibi aequalibus positis habebitur

$$0 = v^m(Mn - Mm) + \left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn\right)^m n\mu - \left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mm\right)^m m\mu.$$

Est vero $Mn - Mm = nf$ et

$$\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn\right)^m = v^m + m \cdot g v^{m-1} \cdot MF - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} Mn$$

atque

$$\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mm\right)^m = v^m + m \cdot g v^{m-1} \cdot MF - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} Mm.$$

Nunc vero his valoribus substituendis proveniet haec aequatio

$$v(nf - mg) - m \cdot g.MF.mg - \frac{m v^m}{k^m}(Mn \cdot n\mu - Mm \cdot m\mu) = 0.$$

At est

$$Mn \cdot n\mu - Mm \cdot m\mu = n\mu \cdot nf - Mm \cdot mg$$

atque ob triangula nfm, mFM et mgn, μGm similia est

$$nf = \frac{mF \cdot mn}{Mm} \quad \text{atque} \quad mg = \frac{\mu G \cdot mn}{m\mu}.$$

His substitutis et per mn diviso prodit

$$v\left(\frac{mF}{Mm} - \frac{\mu G}{m\mu}\right) - m \cdot g \cdot \frac{MF \cdot \mu G}{m\mu} - \frac{mv^m}{k^m}\left(\frac{n\mu \cdot mF}{Mm} - \frac{Mm \cdot \mu G}{m\mu}\right) = 0.$$

Huius aequationis duo priora membra sunt differentialia primi gradus, tertium vero, quia differentiali secundi gradus aequipollet, reiici potest; fiet ergo

$$\frac{m \cdot g \cdot MF \cdot \mu G}{m\mu} + v\left(\frac{\mu G}{m\mu} - \frac{mF}{Mm}\right) = 0$$

sive

$$\frac{m \cdot g \cdot MF \cdot mF}{Mm} + vd.\frac{mF}{Mm} = 0.$$

Ex qua aequatione determinatur positio elementorum Mm et $m\mu$. Quo autem symbolis utamur, sit $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$; erit $Pp = p\pi = dx$, $mF = dy$ et $Mm = ds$ prodibitque

$$\frac{m \cdot gdxdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} = 0.$$

Aequatio vero canonica est

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m},$$

in qua si loco gdx ex superiore aequatione substituatur

$$\frac{-vds}{mdy}d.\frac{dy}{ds},$$

habebitur

$$dv + \frac{vds}{mdy}d.\frac{dy}{ds} + \frac{v^m ds}{k^m} = 0$$

seu

$$\frac{mdvdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} + \frac{mv^m dy}{k^m} = 0.$$

Sit $dy = pds$ et $v^{1-m} = u$; erit, ut sequitur,

$$pdu + \frac{(1-m)}{m}udp + \frac{(1-m)pds}{k^m} = 0,$$

ex qua integrata prodit

$$u = \frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m}\int p^{\frac{1-m}{m}}\,ds.$$

Ex hoc u obtinebitur ergo vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superiore aequatione

$$mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = 0$$

substitutus dabit aequationem inter p et s et consequenter inter y et s.

Ad curvam autem construendam hoc modo computum institui expedit. Posito $dy = pds$ habentur hae duae aequationes

$$mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = 0$$

et

$$dv = gds\sqrt{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

Ex illa est

$$ds = \frac{-vdp}{mgp\sqrt{(1-p^2)}},$$

qui valor in hac substitutus dat

$$mpdv + vdp = \frac{v^{m+1}dp}{gk^m\sqrt{(1-pp)}}.$$

Haec divisa per $v^{m+1}p^2$ fit integrabilis eritque integrale

$$\frac{1}{v^m p} = C + \frac{\sqrt{(1-pp)}}{gk^m p}$$

seu

$$v^m = \frac{gk^m}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}} \quad \text{et} \quad v = \frac{k\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}.$$

Quocirca erit

$$mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$$

et

$$mgdx = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$$

atque

$$mgdy = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}.$$

Ex quibus aequationibus facile est curvam quaesitam construere. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

664. Si radius osculi curvae in M versus axem directus vocetur r, erit

$$d.\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}.$$

Hocque valore substituto habetur

$$\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r} \quad \text{seu} \quad \frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}.$$

Est vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curva moti, cuius directio est ab axe directa, et $\frac{gdy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curva quaesita vis centrifuga est contraria vi normali et se habet ad vim normalem ut $2m$ ad 1, id est ut exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, ad unitatem.

COROLLARIUM 2

665. Hae igitur omnes curvae parte concava sunt deorsum directae. Quia enim vis normalis directio deorsum respicit et radius osculi in eandem plagam tendit, concavitas curvae quoque deorsum respicere debet.

COROLLARIUM 3

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curva quaesito satisfaciens erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum libere describit.

COROLLARIUM 4

667. Quia in aequatione

$$mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$$

indeterminatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $\alpha p + \sqrt{(1-pp)} = 0$, quo casu celeritas fit infinita et quaevis recta satisfacit. Secunda est $p = 1$ seu $dy = ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p = 0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, ut corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

EXEMPLUM 1

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum; erit $m=\frac{1}{2}$. Sumatur ex tribus inventis aequationibus ea, quae dy continet; erit

$$dy=\frac{-2gkdp}{(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})^2\sqrt{(1-pp)}},$$

cuius integralis est

$$y=C-\frac{2gkp}{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}.$$

Cum autem sit

$$p=\frac{dy}{ds}\quad\text{et}\quad\sqrt{(1-pp)}=\frac{dx}{ds},$$

erit

$$y=C-\frac{2gkdy}{\alpha dy+dx},$$

seu neglecta constante C, quia curvam non immutat, erit

$$\alpha ydy+ydx+2gkdy=0.$$

Quae aequatio per y divisa et denuo integrata dat

$$\alpha y+x+2gk\,ly=C.$$

Quae est aequatio pro curva logarithmicali ea ipsa, quam libro primo [§ 889] proiectoriam in hac resistentiae hypothesi invenimus.

EXEMPLUM 2

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportionalis; erit $m=1$. Sumatur aequatio ista

$$ds=\frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})}.$$

Huius autem integralis est

$$s=k\,l\frac{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}{\beta p}\quad\text{sive}\quad e^{\frac{s}{k}}=\frac{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}{\beta p}=\frac{\alpha dy+dx}{\beta dy}.$$

Hinc fit

$$\beta e^{\frac{s}{k}}dy-\alpha dy=dx\quad\text{atque}\quad ds=dy\sqrt{\left(1+\left(\beta e^{\frac{s}{k}}-\alpha\right)^2\right)}.$$

Quae est aequatio pro curva quaesita, quae hanc habebit proprietatem, ut vis centrifuga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curva igitur perpetuo sursum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis centrifugae. In hac vero curva corpus ita movebitur, ut altitudo celeritati in M debita sit

$$=\frac{gk}{e^{\frac{s}{k}}\beta p}=\frac{gkds}{\beta e^{\frac{s}{k}}dy}=\frac{gkds}{dx+\alpha dy}.$$

SCHOLION 1

670. Cum in quavis resistentiae hypothesi peculiaris ratio inter vim centrifugam et vim normalem locum habeat, vacuum autem tanquam casus cuiusque resistentiae considerari queat, sequitur in vacuo quamvis curvam satisfacere debere. Omnes enim curvae in vacuo hanc habent proprietatem, ut super iis ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates, ideoque nulla potest definiri, quae potius quam reliquae quaesito satisfaciant.

SCHOLION 2

671. Notatu dignum est, quod in omnibus his curvis inventis nusquam corporis celeritas sit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo non ita resolvi potest, ut determinetur inter omnes descensus ex A ad C ex quiete factos is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni sola recta verticalis per C transiens et cum horizontali per A ducta coniuncta satisfacit. Nostra autem solutio ita est comparata, ut duorum elementorum quorumque contiguorum positionem eam definiat, quae maximum vel minimum celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea curva invenitur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis augmentum acquirit quam super alia quacunque curva A et C iungente, si corpus ex A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inventis autem colligi potest hac ratione eam prodire curvam, super qua minimum celeritatis incrementum generetur, vel super qua corpus motu maxime uniformi feratur. Atque hoc sensu facile perspicitur motum ex quiete incipere non posse. Quanquam enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sunt posita. super hac verticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari celeritatem, tamen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam verticalem, sed celeritatem initialem in A facit debitam altitudini $k\sqrt[m]{g}$, quae

celeritas tanta est, ut non amplius augmentum accipere queat. Hac igitur celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; hacque ratione nullum, hoc est minimum, capit celeritatis incrementum. Problema ergo, ut solutioni consentaneum fuisset, ita proponi debuisset: inter omnes lineas puncta A et C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima accipiat celeritatis augmenta, atque simul celeritatem initialem in A huic quaesito accommodatam definire.

SCHOLION 3

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nunc huiusmodi problemata, in quibus temporum quadam lege data curvae essent investigandae idoneae; sed cum temporum leges pleraeque ad celeritatum leges possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed unicam in hoc negotio quaestionem de curvis brachystochronis tractabo, quia ea, etsi temporis praescripta est conditio, ad celeritatum rationes, quas iam pervolvimus, reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis utar, quae supra [§ 361—366] circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76

THEOREMA

673. *In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum hypothesi quacunque ea curva AMC* (Fig. 76) *est brachystochrona seu brevissimum ab A ad C producit descensum, in qua vis centrifuga est aequalis vi normali et in eandem plagam directa.*

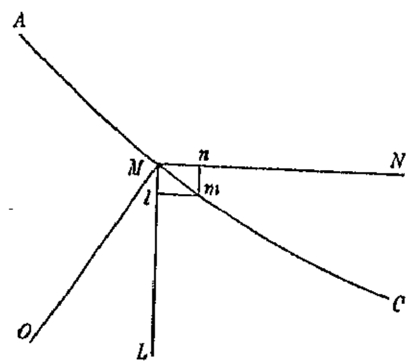


Fig. 76.

DEMONSTRATIO

Quaecunque fuerint potentiae absolutae in corpus in M agentes, eae in duas inter se normales possunt resolvi, quarum altera sit $ML = P$, altera $MN = Q$. Sumto curvae elemento $Mm = ds$ ductisque perpendiculis ml, mn sit $Ml = mn = dx$ et $ml = Mn = dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ et vis resistentiae $= R$ atque radius osculi in M $= r$, quem pono sursum directum, ita ut

posito dx constante sit $r = \frac{ds^3}{dxddy}$. His positis erit

$$dv = Pdx + Qdy - Rds,$$

quia $\frac{Pdx + Qdy}{ds}$ est vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At supra ex natura brachystochronismi, si fuerit

$$dv = Pdx + Qdy + Rds,$$

invenimus fore

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$$

(§ 364), quae formulae ab hac nostra tantum in signo litterae R differunt, haecque in computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam secundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ est vis normalis iuxta MO agens ex utraque vi P et Q orta. Quare si fuerit vis centrifuga vi normali aequalis et in eandem plagam directa, curva erit brachystochrona. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

674. Si vis normalis, quae oritur ex resolutione potentiarum absolutarum corpus sollicitantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem resolutione orta ponatur T, erit

$$dv = (T - R)ds \quad \text{et} \quad \frac{2v}{r} = N,$$

quae duae aequationes coniunctae dabunt curvam brachystochronam.

COROLLARIUM 2

675. Quaecunque igitur fuerit resistentia, erit semper $v = \frac{Nr}{2}$, unde celeritas corporis super brachystochrona facile invenitur. Erit enim ut vis gravitatis 1 ad vim normalem N, ita dimidium radii osculi ad altitudinem celeritati in M debitam.

SCHOLION

676. Haec eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proiectorum libero; est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi normali. Discrimen autem in hoc consistit, ut in motu libero vires centri-

fuga et normalis sint inter se oppositae, pro curvis brachystochronis autem conspirantes, sive in motu libero directiones radii osculi r et vis normalis N coincidunt, in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. Hanc ob rem hic sumsimus

$$r = \frac{ds^3}{dx\,ddy},$$

cum in motu libero sit

$$r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}.$$

COROLLARIUM 3

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem continente prodeat $v = \frac{Nr}{2}$, si hic valor ubique loco v in altera aequatione $dv = (T - R)\,ds$ substituatur, habebitur aequatio naturam curvae brachystochronae exhibens.

COROLLARIUM 4

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque sollicitantibus corpus potentiis eae curvae omnes erunt brachystochronae, in quibus tota, quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PROPOSITIO 77

PROBLEMA

679. *In medio uniformi, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, et potentia absoluta existente uniformi et deorsum directa determinare curvam brachystochronam AM* (Fig. 74, p. 321), *super qua corpus descendens tempore brevissimo ex A ad M perveniat.*

SOLUTIO

Positis in axe verticali abscissa $AP = x$ eique respondente applicata $PM = y$ arcuque curvae quaesitae $AM = s$ sit g potentia deorsum sollicitans et $\frac{v^m}{k^m}$ resistentia in M, si quidem celeritas in M fuerit debita altitudini v.

His positis erit vis normalis $=\frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga, quae est

$$\frac{2v}{r}=\frac{2vdxddy}{ds^3}$$

(§ 676) sumto dx pro constante. Facta ergo aequatione est

$$v=\frac{gds^2dy}{2dxddy}.$$

Aequatio vero canonica pro descensu in hoc medio resistente dat

$$dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}.$$

Prior autem aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constans abit in hanc

$$v=\frac{gdsdy^2}{2dxdds},$$

ex qua fit

$$dv=\frac{gdy^2}{2dx}+\frac{gdsdyddy}{dxdds}-\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2}=\frac{gdy^2}{2dx}+\frac{gds^2}{dx}-\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2}=gdx-\frac{v^m ds}{k^m},$$

quae aequatio reducta dat

$$\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2}-\frac{3gdy^2}{2dx}=\frac{g^m ds^{m+1}dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}$$

seu

$$dsd^3s-3dds^2=\frac{g^{m-1}ds^{m+1}dy^{2m-2}}{2^{m-1}k^m dx^{m-1}dds^{m-2}};$$

haecque aequatio exponit naturam curvae quaesitae. Quae aequatio quo reducatur et ad constructionem praeparetur, pono $ds=pdx$, ut sit

$$dy=dx\sqrt{(p^2-1)},$$

eritque

$$dds=dpdx \quad \text{et} \quad d^3s=dxddp.$$

His substitutis habebitur ista aequatio

$$pddp-3dp^2=\frac{g^{m-1}p^{m+1}dx^m(pp-1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m dp^{m-2}}.$$

Nunc sit porro $dx = qdp$; erit

$$ddx = 0 = dqdp + qddp \quad \text{seu} \quad ddp = \frac{-dpdq}{q}$$

orieturque haec aequatio

$$-\frac{pdq}{q} - 3dp = \frac{g^{m-1}p^{m+1}q^m dp(p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}$$

seu

$$\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1}p^{m+1}dp(p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}.$$

Multiplicetur haec aequatio, quo integrabilis fiat, per mp^{-3m-1} et habebitur

$$-mp^{-3m}q^{-m-1}dq - 3mp^{-3m-1}q^{-m}dp = \frac{mg^{m-1}p^{-2m}dp(p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m},$$

cuius integralis est

$$p^{-3m}q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1}k^m}\int\frac{(p^2-1)^{m-1}dp}{p^{2m}}.$$

Ponatur

$$\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1}k^m}\int\frac{(p^2-1)^{m-1}dp}{p^{2m}} = P^{-m};$$

erit P functio quaedam ipsius p et proinde dabitur, concessis saltem quadraturis. His igitur positis erit

$$p^3q = P \quad \text{atque} \quad q = \frac{P}{p^3}.$$

Quia vero est $dx = qdp$, erit

$$x = \int\frac{Pdp}{p^3} \quad \text{et} \quad s = \int\frac{Pdp}{p^2} \quad \text{atque} \quad y = \int\frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}.$$

Unde constructio curvae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

680. Sit A punctum, in quo motus incipit atque celeritas est nulla; erit ibi $v = 0$ seu

$$\frac{gdsdy^2}{2dxdds} = 0,$$

unde fit $dy = 0$, quia ds evanescere non potest. In puncto A ergo curva habebit tangentem verticalem.

COROLLARIUM 2

681. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in vacuo non discrepat, curvae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est brachystochrona in vacuo, non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens erit verticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite parvus.

COROLLARIUM 3

682. Quia in A est $dy = 0$ atque est $dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)}$, erit pro puncto A $p = 1$. Ex data ergo curvae constructione punctum A obtinebitur, si fiat $p = 1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi, ut x, s et y evanescant posito $p = 1$.

COROLLARIUM 4

683. Quoniam est

$$v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds},$$

erit propter $ds = pdx$ et $dds = dpdx$

$$v = \frac{gpdx(p^2 - 1)}{2dp}$$

atque ob $dx = qdp$ erit

$$v = \frac{gpq(pp - 1)}{2} = \frac{gP(pp - 1)}{2p^2}.$$

Unde patet v evanescere, si sit $p = 1$.

COROLLARIUM 5

684. Radius osculi in puncto quocunque M est

$$= \frac{ds^3}{dxddy} = \frac{ds^2dy}{dxdds}.$$

Quare ob $ds = pdx$ erit radius osculi

$$r = \frac{p^2dx\sqrt{(p^2 - 1)}}{dp} = p^2q\sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{P\sqrt{(p^2 - 1)}}{p}.$$

In puncto ergo A, ubi est $p = 1$, erit radius osculi $r = 0$.

COROLLARIUM 6

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est horizontalis; erit ibi $dy=\infty$ ideoque $p=\infty$. Punctum igitur B invenietur ponendo $p=\infty$. Erit ergo in hoc puncto $v=\frac{gP}{2}$ et radius osculi $r=P$.

EXEMPLUM 1

686. Ponamus resistentiam evanescentem, ita ut motus fiat in vacuo; erit $k=\infty$ ideoque habebitur

$$dsd^3s-3dds^2=0.$$

Quae aequatio divisa per $dsdds$ et integrata dat

$$ldds-3lds=lC$$

seu

$$\frac{dds}{ds^3}=\frac{1}{adx}=\frac{dx}{adx^2}.$$

Haec aequatio denuo integrata dat

$$-\frac{1}{2ds^2}=\frac{x}{adx^2}+C.$$

Vel mutatis constantibus positoque $ds=pdx$ erit $-a=ppx+Cpp$; quae, quia posito $p=1$ x debet evanescere, abit in hanc

$$x=\frac{a(pp-1)}{pp} \quad \text{seu} \quad p=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}} \quad \text{ideoque} \quad ds=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}},$$

quae est aequatio pro cycloide, ut constat.

EXEMPLUM 2

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum; erit $m=1$ atque

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{k}\int\frac{dp}{p^2}=C-\frac{1}{kp}.$$

Unde fit

$$P=\frac{kp}{Ckp-1}=\frac{akp}{kp-a}.$$

Hanc ob rem erit

$$x = \int \frac{akdp}{p^2(kp-a)} \quad \text{et} \quad s = \int \frac{akdp}{p(kp-a)}.$$

Fit ergo

$$s = k\,l\frac{kp-a}{(k-a)p} \quad \text{atque} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-adx}{(k-a)ds}$$

ob $ds = pdx$. Porro ergo habebitur

$$(k-a)e^{\frac{s}{k}}ds = kds - adx,$$

quae integrata dat

$$k(k-a)e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a).$$

Vel eliminata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit

$$ksds - axds - akds + akdx = 0.$$

At si exponentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem exprimere velimus, erit

$$k(k-a)e^{\frac{s}{k}} - k(k-a) = k(k-a)\left(\frac{s}{k} + \frac{ss}{1\cdot 2k^2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^4} + \text{etc.}\right).$$

Quae series substituta dat

$$\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1\cdot 2\,k} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k^2} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^3} + \text{etc.}$$

In quovis puncto M est

$$v = \frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}.$$

Pro puncto B vero, in quo tangens est horizontalis, erit

$$s = k\,l\frac{k}{k-a} \quad \text{atque} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$$

et idcirco

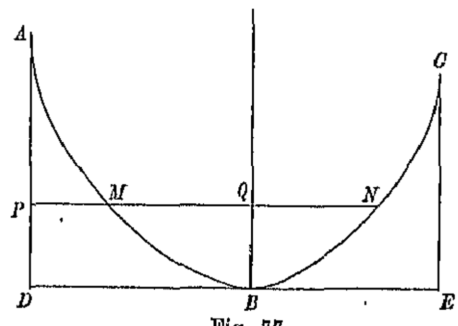


Fig. 77.

$$x = -k + \frac{kk}{a}\,l\frac{k}{k-a}.$$

Continuetur nunc curva ultra B in BNC (Fig. 77); cuius natura ut inveniatur,

in axe BQ ponatur abscissa $BQ = t$ et arcus $BN = z$. His positis erit

$$AP = x = -k - t + \frac{k^2}{a} l \frac{k}{k-a} \quad \text{et} \quad AMN = s = z + kl \frac{k}{k-a}.$$

Erit ergo

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a} e^{\frac{z}{k}};$$

quibus valoribus in superiore aequatione substitutis prodibit

$$k^2 e^{\frac{z}{k}} = kz + k^2 + at \quad \text{seu} \quad at = k^2(e^{\frac{z}{k}} - 1) - kz.$$

Atque per seriem

$$at = \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

pro curva BNC; at pro ramo BMA, in quo erit arcus $BM = z$ negativus, erit

$$at = k^2(e^{\frac{-z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1 \cdot 2} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^2} - \text{etc.}$$

Curva vero BNC in C habebit quoque tangentem verticalem, quod punctum invenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc posito

$$a = ke^{\frac{z}{k}} - k \quad \text{seu} \quad z = kl \frac{a+k}{k} = BNC$$

atque

$$t = CE = k - \frac{kk}{a} l \frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \text{etc.},$$

cum contra sit

$$AD = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} + \text{etc.}$$

Ex quo apparet punctum A esse altius positum quam punctum C atque in A et C curvam habere cuspides seu puncta reversionis, ita ut tam AD quam CE sint curvae diametri; id quod ex hoc intelligitur, quod sit

$$y = \int \frac{P\,dp\sqrt{(pp-1)}}{p^3},$$

ubi $\sqrt{(p^2-1)}$ valorem habet tam affirmativum quam negativum.

SCHOLION 1

688. Infra perspicietur hanc curvam brachystochronam congruere cum curva tautochrona in eadem resistentiae hypothesi. Haec vero inter motus tautochronos et brachystochronos interest differentia, ut ad tautochronismum obtinendum corpus in ramo CNB descendere, in altero ascendere debeat, cum e contrario pro brachystochronismo descensus per AMB fieri debeat. Interim tamen haec utriusque curvae convenientia attentione digna videtur, cum et in vacuo eadem congruentia observetur.

EXEMPLUM 3

689. Resistat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita ut sit $m = 2$. Habebitur ergo pro curva quaesita ista aequatio

$$dsd^3s - 3dds^2 = \frac{g\,ds^3dy^2}{2k^2dx},$$

ad construendam vero curvam

$$\frac{1}{p^3} = \frac{g}{k^2}\int\left(\frac{dp}{p^2} - \frac{dp}{p^4}\right);$$

unde fit

$$P = \frac{kp\sqrt{3np}}{\sqrt{g(p^3 - 3np^2 + n)}}$$

atque

$$s = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$$

et

$$x = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}} \quad \text{ac} \quad y = \int\frac{kdp\sqrt{3n(pp-1)}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}.$$

Huius ergo curvae constructio uti generalis habetur. Quia autem n numerum quemcunque denotat, sit $n = \frac{1}{2}$; erit

$$y = \int\frac{kdp\sqrt{3}}{p\sqrt{g(2p^2 - p)}} = \frac{2k\sqrt{3(2p-1)}}{\sqrt{gp}} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}};$$

quam constantem ideo adiecimus, quo fiat $y = 0$ posito $p = 1$.[1]) Atque posito

---

1) Posito $n = \frac{1}{2}$ erit

$$y = \int\frac{kdp\sqrt{3(pp-1)}}{p\sqrt{g(2p^4 - 3p^3 + p)}},$$

quae formula, quia $2p^4 - 3p^3 + p$ factorem $pp - 1$ non continet, reductionem ab EULERO factam non admittit. Itaque etiam formulae sequentes locum non habent. P. St.

$p = \infty$ erit applicata

$$DB = \frac{2k(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{\sqrt{g}}.$$

Fit autem

$$p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$$

atque

$$\sqrt{(p^2-1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}.$$

Ex quo oritur

$$x = \int \frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}$$
$$= \int \frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(gy^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2)}},$$

quae est aequatio inter coordinatas x et y pro curva quaesita.

SCHOLION 2

690. In medio, quod in simplici celeritatum ratione resistit, brachystochronam simplicius determinare non licet, quam statim ex universali constructione consequitur. Quamobrem hunc resistentiae casum exemplo non sumus prosecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes propositiones attinet, in quibus curva quaeritur, super qua corpus descendens citissime ad datam lineam, sive rectam sive curvam, perveniat, ea simili modo pro resistente medio solvuntur quo pro vacuo. Cum scilicet ex eodem puncto A innumerabiles egrediantur curvae brachystochronae, ex iis ea est eligenda, quae datae lineae, sive rectae sive curvae, ad angulos rectos occurrat; super hac enim corpus ad istam lineam brevissimo tempore pervenire capite praecedente est demonstratum. Simili ratione curva, quae omnes brachystochronas ad angulos rectos traiicit, ab omnibus arcus abscindet isochronos seu quos corpus descendens aequalibus temporibus absolvit. Haecque omnia eodem se habent modo, quaecunque fuerit resistentia et quaecunque potentiae absolutae. Problema autem brachystochronarum generalissime conceptum evolvemus.

PROPOSITIO 78

PROBLEMA

691. *In medio resistente quocunque et potentiis sollicitantibus quibuscunque invenire curvam brachystochronam* AM (Fig. 78), *super qua corpus descendens ex* A *ad* M *citissime perveniat.*

SOLUTIO

Sit A motus initium, per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe habenda, in qua sumatur abscissa $AP = x$; cui respondeat applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$. Sit porro corporis in M celeritas debita altitudini v et resistentia utcunque a celeritate pendens $= R$. Quaecunque nunc corpus sollicitent potentiae absolutae, earum loco duae potentiae substitui possunt in datis directionibus ML et MN, quarum illa axi AP sit parallela, haec vero ad illum normalis. Vis autem corpus secundum ML sollicitans sit $= P$ et vis secundum $MN = Q$. Ex his viribus oritur

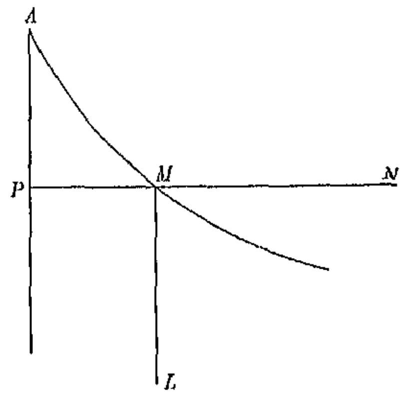


Fig. 78.

$$dv = Pdx + Qdy - Rds.$$

Atque natura brachystochronismi dat

$$\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$$

(§ 673) denotante r radium osculi curvae in M versus superiora directum; pro quo ergo sumto dx constante ponimus $\frac{+ds^3}{dxddy}$, cum alias deberet esse $r = \frac{-ds^3}{dxddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus

$$dv = Pdx + Qdy - Rds \quad \text{et} \quad \frac{2vdxddy}{ds^2} = Pdy - Qdx$$

si eliminetur v, habebitur aequatio pro curva brachystochrona quaesita; est nempe

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy};$$

cuius differentiale loco dv atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit aequationem pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

692. Aequatio pro curva, si dicto modo v eliminetur, fit differentialis tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque constantes adiici poterunt, quibus effici potest, ut evanescente x simul quoque y et s et v evanescant atque praeterea curva per datum punctum M transeat.

COROLLARIUM 2

693. Quia igitur semper curva brachystochrona potest exhiberi, quae initium habeat in A et per datum punctum transeat, infinitae curvae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

COROLLARIUM 3

694. Inventa aequatione pro curva brachystochrona AM innotescet simul corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; erit namque

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}.$$

COROLLARIUM 4

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo corpus arcum AM absolvit; erit scilicet tempus per AM

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}};$$

quod propter aequationem inter x et y iam inventam poterit saltem per quadraturas exhiberi.

COROLLARIUM 5

696. Si igitur curva esset invenienda, quae omnes brachystochronas ex A eductas ad angulos rectos traiicere deberet, tum eius lineae constructio haberetur, si ab omnibus abscinderetur

$$\int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}.$$

eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curvis infinitis arcus isochroni abscinduntur, qui, quoniam omnes curvae sunt brachystochronae, terminabuntur ad traiectoriam orthogonalem.

EXEMPLUM

697. Sit resistentia quadratis coleritatum proportionalis atque exponens resistentiae utcunque variabilis q; erit $R = \frac{v}{q}\cdot$ Cum ergo sit

$$dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q},$$

erit integrando

$$e^{\int\frac{ds}{q}} v = \int e^{\int\frac{ds}{q}}(Pdx + Qdy).$$

Cum autem sit

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy},$$

erit

$$2dxddy \int e^{\int\frac{ds}{q}}(Pdx + Qdy) = e^{\int\frac{ds}{q}} ds^2(Pdy - Qdx),$$

in qua aequatione non amplius inest v. Interim tamen haec aequatio fit differentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur; indeterminati praeterea ipsarum P, Q et q valores in causa sunt, quo minus aequatio ad constructionem praeparari queat.

SCHOLION

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curvas brachystochronas sunt deducta, latissime patent, quia, quotcunque potentiae corpus sollicitaverint, eae omnes in huiusmodi duas possunt resolvi, si modo omnium directiones in eodem plano fuerint positae. Q
positione continentur brachystochronae pro qu
hypothesi, quas autem, quia neque concinnae
proveniunt, ulterius non persequimur. Missis i
quaedam lex praescribitur, progredimur ad se
curvae requiruntur, quae a corpore super iis
sionem.

PROPOSITIO 79

PROBLEMA

699. *In hypothesi gravitatis uniformis et medio uniformi, quod in ratione quacunque celeritatum resistit, determinare curvam aequabilis pressionis AM* (Fig. 79), *quae a corpore super ea descendente ubique eandem sustineat pressionem.*

SOLUTIO

Positis $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$ et celeritati in M altitudine debita $=v$ sit potentia corpus deorsum secundum ML trahens $=g$ et vis resistentiae in M $=\frac{v^m}{k^m}$. Erit ergo, dum corpus per elementum Mm progreditur,

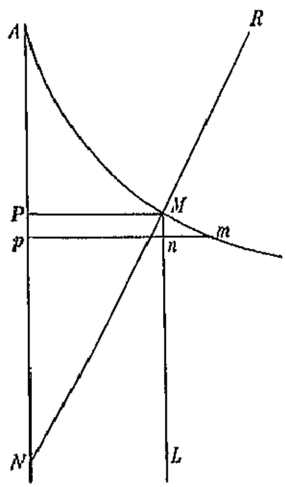


Fig. 79.

$$dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}.$$

Ponamus curvam deorsum esse convexam, ita ut MR sit radii osculi directio atque ipse radius osculi $MR=\frac{ds^3}{dxddy}$ posito dx constante. Vis ergo contrifugae directio erit in normali MN eiusque quantitas est $=\frac{2vdxddy}{ds^3}$. Secundum eandem vero directionem curva premitur a vi normali ex resolutione potentiae $ML=g$ orta, quae est $=\frac{gdy}{ds}$. Tota ergo vis, qua curva secundum MN premitur, est

$$=\frac{gdy}{ds}+\frac{2vdxddy}{ds^3};$$

quae cum debeat esse constans, ponatur ea aequalis ag habebiturque

$$agds^3=gdyds^2+2vdxddy$$

atque hinc

$$v=\frac{agds^3-gdyds^2}{2dxddy}.$$

Sit $ds=pdx$ atque $dy=dx\sqrt{(p^2-1)}$; erit

$$ddy=\frac{pdpdx}{\sqrt{(p^2-1)}}.$$

His substitutis erit

$$v = \frac{(\alpha g p^3 dx - g p^3 dx \sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(pp-1)}}{2p\,dp} = \frac{\alpha g p^2 dx \sqrt{(p^2-1)} - g p\,dx(p^2-1)}{2\,dp}.$$

Sit porro $dx = 2q\,dp$; erit

$$v = gpq(\alpha p \sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1)$$

vel

$$v = Pq$$

posito

$$gp(\alpha p \sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = P.$$

Erit ergo

$$dv = P\,dq + q\,dP \quad \text{et} \quad v^m = P^m q^m.$$

Quibus valoribus in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ substitutis prodibit

$$P\,dq + q\,dP = g\,dx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}.$$

Est vero

$$dx = 2q\,dp \quad \text{et} \quad ds = p\,dx = 2pq\,dp.$$

Quamobrem proveniet ista aequatio

$$P\,dq + q\,dP = 2gq\,dp - \frac{2\,P^m q^{m+1} p\,dp}{k^m},$$

quae duas tantum continet variabiles p et q, quia P per p datur. Ad hanc aequationem construendam ponatur

$$q = \frac{1}{P u^{\frac{1}{m}}};$$

quo facto obtinebitur ista aequatio

$$du + \frac{2mgu\,dp}{P} = \frac{2mp\,dp}{k^m P};$$

quae ducta in $e^{2mg\int\frac{dp}{P}}$ et integrata abit in hanc

$$u = \frac{2me^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{k^m}\int \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}} p\,dp}{P}.$$

Hinc ergo invenitur u per p, atque u invento erit $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ atque

$$x = \int \frac{2\,dp}{Pu^{\frac{1}{m}}} \quad \text{et} \quad s = \int \frac{2\,p\,dp}{Pu^{\frac{1}{m}}} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{2\,dp\sqrt{(p^2-1)}}{Pu^{\frac{1}{m}}}.$$

Cum autem sit

$$P = gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1),$$

erit

$$\frac{g\,dp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha\sqrt{(p^2-1)}} + \frac{(1-\alpha^2)\,dp}{\alpha^2 p - \alpha\sqrt{(p^2-1)}}$$

atque

$$\int \frac{g\,dp}{P} = lp - l(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})$$

et

$$e^{2mg\int\frac{dp}{P}} = p^{2m}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m}.^{1)}$$

Est vero

$$\int \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,p\,dp}{P} = \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,p}{2mg} - \frac{1}{2mg}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,dp.$$

Quocirca erit

$$u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{gk^m}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,dp = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m}\,dp}{gk^m p^{2m}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m}}.^{2)}$$

Cum igitur hoc modo ex p inveniri possit u, curvae quaesitae constructio hinc perficietur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

700. Curva inventa ergo hanc habebit proprietatem, ut in quovis puncto M prematur versus MN vi constanti, quae est ad vim gravitatis $ML = g$ ut α ad 1.

---

1) Editio princeps:

$$\int \frac{g\,dp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha}\,l(p + \sqrt{(p^2-1)}) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha}\,l\,\frac{\alpha p - \sqrt{(p^2-1)}}{p - \sqrt{(p^2-1)}}$$

et

$$e^{2mg\int\frac{dp}{P}} = p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}.$$

Correxit P. St.

2) Editio princeps:

$$\frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}\,dp}{gk^m p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}}.$$

Correxit P. St.

COROLLARIUM 2

701. Si pro α sumatur numerus negativus, curva ubique secundum MR, directionem priori oppositam, aequabiliter premetur. Hoc ergo casu curva debet esse concava deorsum, quia vis centrifuga contraria atque maior esse debet quam vis normalis, cuius directio semper in MN est sita.

COROLLARIUM 3

702. Si $\alpha = 0$, tum curva prodibit, quae nullam omnino pressionem a corpore sustinet. Quae ergo curva est ea ipsa, quam corpus proiectum libere motum describit.

COROLLARIUM 4

703. Si $\alpha = 1$ seu tota pressio $= g$, tum curva erit convexa deorsum ubique. Nam quia vis normalis sola ubique est minor quam g nisi casu, quo $ds = dy$, vis centrifuga cum ea conspirare debet ideoque radius osculi in plagam ipsi MN oppositam cadere.

COROLLARIUM 5

704. Si ponatur
$$k^m e^{2mg\int\frac{dp}{P}} u = 2mz,$$
erit
$$dz = \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}} p\,dp}{P}.$$
Particularis ergo solutio, quia in hac aequatione indeterminatae sunt a se invicem separatae, habebitur, si ponatur $P = 0$. Hinc autem fit
$$gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = 0$$
seu
$$\alpha p = \sqrt{(p^2-1)} \quad \text{sive} \quad \alpha ds = dy.$$
Unde prodit
$$\alpha s = y.$$
Satisfacit ergo recta angulum cum verticali AP constituens, cuius sinus est α sumto 1 pro sinu toto. Hoc enim casu vis centrifuga evanescit et vis normalis fit $= \alpha g$.

EXEMPLUM

705. Sit $\alpha=1$ seu quaeratur curva, quae ubique vi $=g$ promatur; quo casu integratio ipsius $\frac{g\,dp}{P}$ simplicior evadit; erit enim

$$e^{2mg\int\frac{dp}{P}}=p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{-2m}=\left(\frac{p}{p-\sqrt{(p^2-1)}}\right)^{2m}=(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}.$$

Hanc ob rem erit

$$u=\frac{p}{gk^m}-\frac{\int(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}\,dp}{gk^m(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}}.$$

Quae aequatio, quoties $2m$ est numerus integer, integrationem admittit. Posito enim

$$p^2+p\sqrt{(p^2-1)}=\frac{r+1}{2}$$

erit

$$p=\frac{r+1}{2\sqrt{r}}$$

atque

$$u=\frac{r+1}{2gk^m\sqrt{r}}-\frac{1}{4gk^m(r+1)^{2m}}\int\frac{(r-1)(r+1)^{2m}\,dr}{r\sqrt{r}}.$$

Est autem hac positione

$$r=2p^2-1+2p\sqrt{(p^2-1)}\quad\text{seu}\quad\sqrt{r}=p+\sqrt{(p^2-1)}.$$

Ut si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis, erit

$$u=\frac{r+1}{2g\sqrt{kr}}-\frac{1}{4g(r+1)\sqrt{k}}\int\frac{(r^2-1)\,dr}{r\sqrt{r}}=\frac{1}{2g\sqrt{k}}\left(\frac{r+1}{\sqrt{r}}-\frac{r^2+\beta\sqrt{r}+3}{3(r+1)\sqrt{r}}\right)=\frac{2rr+6r-\beta\sqrt{r}}{6g(r+1)\sqrt{kr}},$$

seu mutata constante β est

$$u=\frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2\beta}{3g(r+1)\sqrt{k}}.$$

Posito autem loco r eius valore erit

$$u=\frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3gp\sqrt{k}}+\frac{\beta}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{k}}.$$

Sit $\beta = 0$; erit

$$u^{\frac{1}{m}} = u^2 = \frac{(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$$

et propter

$$P = gp(p - \sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(p^2-1)}$$

erit

$$Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p-\sqrt{(p^2-1)})(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$$

atque

$$x = \frac{2gk}{3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gk\,l(3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}).$$

SCHOLION

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit, si $\alpha = -1$, quo casu prodit curva concava deorsum, in qua vis centrifuga contraria est et maior quam vis normalis; quippe excessus est $= g$. Eadem vero ipsa prodit aequatio, quae pro casu $\alpha = 1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{(p^2-1)}$ debet immutari.

Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in quibus aliae pressionum leges proponuntur, eae vel ad nimis prolixos calculos deducunt vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curvas, in quibus pressio totalis sit duplo maior quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis, esse brachystochronas, atque curvas, in quibus alia obtinet ratio, supra quoque iam pertractavimus, cum curvas investigaremus, super quibus motus quam minime acceleraretur. Sequitur ergo, ut ad curvas inveniendas progrediamur, super quibus plures diversi descensus vel ascensus datas inter se teneant leges, quae quaestiones plurimum difficultatis in se habent. Necesse enim est ad huiusmodi problemata solvenda, ut celeritas corporis in singulis locis possit exprimi per quantitates, quibus curvae natura determinatur. Quod autem cum non in quavis resistentiae hypothesi possit perfici, uti supra

modo resistentia est valde parva, huiusmodi quaestiones solutu faciliores evadent. In his vero problematibus vel ratio celeritatum, quae in diversis descensibus super eadem curva acquiruntur, investigatur vel temporum, quibus diversi descensus aut ascensus absolvuntur, ratio. Atque in utroque genere ex data vel temporum vel celeritatum variis descensibus acquisitarum ratione ipsae curvae sunt inveniendae.

PROPOSITIO 80

PROBLEMA

707. *In medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, atque potentia absoluta deorsum tendente comparare inter se celeritates in puncto A* (Fig. 80), *quae in diversis descensibus corporis super curva MA acquiruntur.*

SOLUTIO

Sit celeritas in A, quam uno descensu acquisivit, debita altitudini b et celeritas in M debita altitudini v. Ponantur $AP = x$, $AM = s$, potentia sollicitans in M, quae sit utcunque variabilis, $= P$ atque exponens resistentiae $= k$. His positis erit

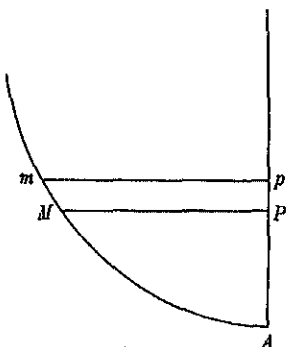


Fig. 80.

$$dv = -Pdx + \frac{vds}{k},$$

quae aequatio integrata dat

$$v = e^{\frac{s}{k}}\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx\right)$$

integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ita accepto, ut evanescat posito $x = 0$. Sit nunc M initium descensus, ubi est $v = 0$; invenietur hoc punctum ex aequatione

$$b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx.$$

Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m atque celeritas in A acquisita sit debita altitudini $b + db$. Erit ergo

$$b + db = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$$

= summae omnium $e^{\frac{-s}{k}}Pdx$ ab A usque ad m; in aequatione vero priore $\int e^{\frac{-s}{k}}Pdx$ significat summam omnium $e^{\frac{-s}{k}}Pdx$ ab A usque ad M tantum. Illa ergo summa superat hanc summam ultimo elemento $e^{\frac{-s}{k}}Pdx$ existente $AM = s$ et $Pp = dx$. Erit ergo

$$db = e^{\frac{-s}{k}}Pdx.$$

Ex qua aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et inter celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

708. Dato ergo arcu descensus $AM = s$ erit altitudo celeritati in A acquisitae debita

$$b = \int e^{\frac{-s}{k}}Pdx.$$

Seu si punctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates considerantur, erit aequatio inter eas

$$db = e^{\frac{-s}{k}}Pdx.$$

COROLLARIUM 2

709. Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter arcus descensus et celeritates in puncto A acquisitas, invenietur aequatio pro curva AM propositae conditioni satisfaciens.

COROLLARIUM 3

710. Si medium non fuerit uniforme, sed difforme utcunque existente eius exponente $= q$, loco aequationis inventae prodibit ista aequatio

$$db = e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx,$$

cuius similis est usus.

COROLLARIUM 4

711. Quia valor ipsius e est unitate maior, quippe 2,7182818284, erit $e^{-\int\frac{ds}{q}}$ seu $e^{\frac{-s}{k}}$ unitate minor et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacuo vero esset $db = Pdx$.

SCHOLION 1

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus celeritate altitudini b debita ex A per arcum $AM = s$ ascendit. Tum enim erit

$$db = e^{\frac{s}{k}} Pdx$$

vel in medio difformi

$$db = e^{\int\frac{ds}{q}} Pdx.$$

Quae formulae ex illis descensui inservientibus invenientur ponendo $-s$ loco $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur. Hinc apparet, quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, ita fore pro ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{s}{k}}$ seu $e^{\int\frac{ds}{q}}$ est unitate maior.

COROLLARIUM 5

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro descensu esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = \alpha\int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{k}} = \alpha$ seu $s = \text{const.}$, in qua aequatione nulla linea continetur.

COROLLARIUM 6

714. Neque etiam curva poterit inveniri, pro qua vel in descensu vel in ascensu foret $b = \int Qdx$ denotante Q functionem quamcunque ipsarum s et x, nisi Q ita sit comparata, ut $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$. Fit enim $e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P = Q$ et $e^{\pm\int\frac{ds}{q}}$ abit in 1 posito $s = 0$.

SCHOLION 2

715. Ratio huius est, quod posuimus s evanescere evanescente x; atque hanc ob rem aequatio

$$db = e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P dx$$

ita debet integrari, ut evanescat b posito $x = 0$. Si autem b ita detur, ut db per dx exprimatur, aequatio per dx dividi poterit. Quocirca ea ad hanc legem non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate iam gaudeat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, ut esset $db = R ds$ seu $b = \int R ds$ evanescente b facto $s = 0$, tum aequatio pro curva quaesita erit

$$R ds = e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P dx,$$

quae semper est pro curva reali, dummodo $\int R ds$ habeat valorem affirmativum prodeatque $ds > dx$ seu

$$e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P > R.$$

EXEMPLUM 1

716. Sit potentia sollicitans uniformis seu $P = g$ et medium resistens uniforme requiraturque curva MA hanc habens proprietatem, ut corpus in singulis descensibus ad A usque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata ratione arcuum descensu percursorum. Erit ergo $\sqrt{b}$ ut $\sqrt{s}$ seu $b = \alpha s$; unde fit

$$\alpha ds = g e^{\frac{-s}{k}} dx \quad \text{seu} \quad \alpha e^{\frac{s}{k}} ds = g dx,$$

cuius integralis est

$$\alpha k (e^{\frac{s}{k}} - 1) = g x$$

addita constante, quo fiat $x = 0$ evanescente s. Habebitur ergo

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha k + g x}{\alpha k} \quad \text{atque} \quad \frac{s}{k} = l(\alpha k + g x) - l\alpha k.$$

Quae differentiata dat

$$\frac{ds}{k} = \frac{g dx}{\alpha k + g x};$$

ex quo intelligitur curvam esse tractoriam filo longitudinis k super basi horizontali a puncto A deorsum distante intervallo $\frac{\alpha k}{g}$. Construetur ergo curva hoc modo: super basi horizontali CE (Fig. 81) et filo $BC = k$ describatur tractoria BA; tum ducatur horizontalis DA a CE ad distantiam $DC = \frac{\alpha k}{g}$; quo facto satisfaciet curvae portio BA quaesito. Ponimus autem BC verticalem et B punctum tractoriae summum; ex quo intelligitur α necessario minus esse debere quam g. Si enim esset maior, foret $CD > CB$ ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $\alpha = g$, punctum A in B caderet adeoque nonnisi punctum satisfaceret. Si fuerit $\alpha = 0$, punctum A infinite distaret et corpus descendens omnem amitteret celeritatem. Cum igitur debeat esse $\alpha < g$, erit $b < gs$.

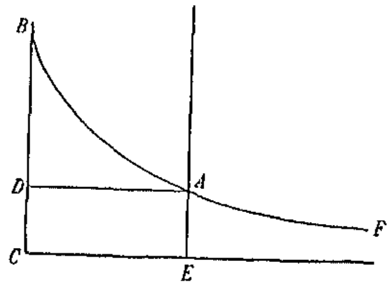


Fig. 81

EXEMPLUM 2

717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitantis hypothesi quaeratur curva AMF (Fig. 82), super qua omnes ascensus ex puncto A facti ita se habeant, ut toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quadratis celeritatum initialium in A proportionales. Erit ergo ut ante $b = \alpha s$ atque $db = \alpha ds$. Cum autem pro ascensibus sit $db = ge^{\frac{s}{k}} dx$, erit

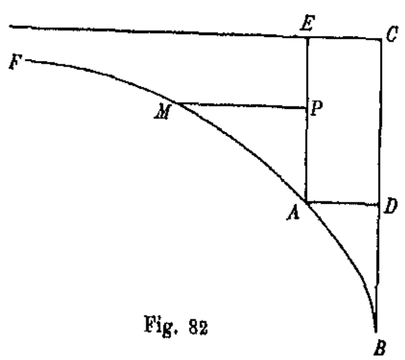


Fig. 82

$$\alpha e^{\frac{-s}{k}} ds = g dx$$

atque integrando

$$\alpha k(1 - e^{\frac{-s}{k}}) = gx.$$

Hinc igitur habetur

$$e^{\frac{-s}{k}} = \frac{\alpha k - gx}{\alpha k}$$

atque

$$\frac{ds}{k} = \frac{g dx}{\alpha k - gx} \quad \text{seu} \quad \left(\frac{\alpha k}{g} - x\right)\frac{ds}{dx} = k.$$

Ex quo apparet curvam satisfacientem esse iterum tractoriam super basi

horizontali CE filo longitudinis k constructam, sed deorsum spectantem, cuius cuspis sit in B existente $BC = k$. Sumatur autem $CD = \frac{\alpha k}{g}$; ductaque horizontali DA erit A punctum, in quo ascensus omnes incipere debent. Hinc ergo quoque intelligitur α non posse esse maius quam g, quia alias punctum A foret imaginarium. At si fuerit $\alpha = g$ seu $b = gs$, incidet A in B eritque arcus quolibet ascensu percursus $= \frac{b}{g}$.

SCHOLION 3

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex universali formula inventa resolvi possunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaestiones pro aliis resistentiae hypothesibus, quibus solutio earum inveniri queat, affero, quoniam tales quaestiones neque iam sunt agitatae neque satis sunt curiosae, ut earum solutiones requirantur. Ad digniora igitur progredior problemata, in quibus curvae quaeruntur tautochronae, super quibus omnes vel ascensus vel descensus aequalibus absolvantur temporibus.

PROPOSITIO 81

PROBLEMA

719. *In hypothesi potentiae uniformis deorsum directae et medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, invenire curvam tautochronam AM* (Fig. 80, p. 352), *super qua omnes descensus ad punctum A usque absolvantur aequalibus temporibus.*

SOLUTIO

Consideretur quicunque descensus, in quo celeritas, quam corpus in puncto infimo A acquirit, debita sit altitudini b. Ponantur $AP = x$, $AM = s$, altitudo celeritati in M debita $= v$ atque potentia sollicitans $= g$ et medii exponens $= k$, ita ut resistentia in M sit ad vim gravitatis ut $\frac{v}{k}$ ad 1. His positis erit

$$dv = -g\,dx + \frac{v\,ds}{k};$$

quae aequatio integrata dat

$$v = e^{\frac{s}{k}}\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx\right)$$

integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx$ ita sumto, ut evanescat posito x vel $s=0$. Ex hac ergo aequatione initium descensus invenitur ponendo $v=0$ seu

$$\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = b.$$

Tempus vero, quo arcus MA absolvitur, hinc erit

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx\right)}},$$

ex quo prodibit totius descensus tempus, si post integrationem fiat

$$\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = b.$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = t \quad \text{et} \quad \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = du,$$

ita ut sit tempus totius descensus

$$= \int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$$

posito post integrationem $t=b$. Quo nunc haec expressio perpetuo eundem obtineat valorem, debebit

$$\int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$$

esse functio nullius dimensionis ipsarum b et t, ut posito $t=b$ ex formula b evanescat. Hanc ob rem du debet esse functio dimidiae dimensionis ipsius t tantum, quia u a b pendere non potest. Fieri ergo necesse est

$$du = \frac{\alpha\,dt}{\sqrt{t}}$$

existente α quantitate constante b non continente. Hoc posito erit tempus unius descensus

$$= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt-tt)}}$$

posito post integrationem $t=b$. Vel posita ratione diametri ad peripheriam

$1:\pi$ erit tempus unius descensus $=\alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet, quomodocunque b seu descensus initium mutetur. Curva ergo tautochrona quaesita determinabitur ex hac aequatione

$$du = \frac{\alpha\, dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}},$$

cuius integralis est

$$2\alpha\sqrt{t} = 2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) \quad \text{seu} \quad t = \frac{k^2}{\alpha^2}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2$$

addita scilicet constante, quae faciat t evanescere posito $s=0$. Cum autem sit

$$t = \int e^{\frac{-s}{k}}\, g\, dx,$$

erit

$$dt = e^{\frac{-s}{k}}\, g\, dx = \frac{k}{\alpha^2}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) e^{\frac{-s}{2k}}\, ds.$$

Ponamus

$$\alpha^2 g = a \quad \text{seu} \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{g}};$$

erit

$$a\, dx = k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) ds,$$

cuius integralis est

$$ax = 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) - ks;$$

quae quidem aequationes, quia variabiles s et x a se invicem sunt separatae, ad curvam construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus libera desideretur, quia ex altera aequatione est

$$k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) = \frac{ax + ks}{2k},$$

erit hoc valore in altera substituto

$$axds + ksds = 2akdx.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

720. Quia est $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$, erit tempus unius descensus $= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In vacuo autem et gravitate $= 1$ est tempus descensus penduli f

$$= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$$

(§ 166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est $= \frac{2a}{g}$.

COROLLARIUM 2

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g} = 3166$ part. millesimarum pedis Rhenani [§ 179], descensus absolvetur dimidio minuto secundo; hoc ergo evenit, si sit $a = 1583g$ scrup. pedis Rhen.

COROLLARIUM 3

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} y\,dx\right) = e^{\frac{s}{k}}(b - t)$$

atque ob

$$t = \frac{gk^2\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2}{a}$$

erit

$$v = e^{\frac{s}{k}}\left(b - \frac{gk^2}{a}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\right) = \frac{abe^{\frac{s}{k}} - gk^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2}{a}.$$

COROLLARIUM 4

723. Posito $v = 0$ prodibit totus arcus descensus ex hac aequatione

$$ab = gk^2\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2.$$

Si ergo arcus descensus ponatur $= f$, erit

$$ab = gk^2\left(1 - e^{\frac{-f}{2k}}\right)^2.$$

Quare dato arcu descensus f erit

$$v = \frac{gk^2 e^{\frac{s}{k}}}{a}\left(\left(1 - e^{\frac{-f}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\right)$$

COROLLARIUM 5

724. Aequatio pro curva haec

$$ax = 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) - ks$$

in seriem exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ convertendo, quae est

$$1 + \frac{s}{2k} + \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 4k^2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8k^3} + \text{etc.},$$

abit in hanc

$$ax = \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 8k^2} + \text{etc.}$$

seu

$$2ax = \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

SCHOLION 1

725. Notari hic convenit hanc curvam simili aequatione exprimi, qua supra brachystochrona ascensui inserviens exprimebatur; ibi enim erat

$$at = \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

(§ 687), quae aequatio ab hac nostra pro tautochrona inventa in hoc tantum differt, quod hic sit $2a$, quod ibi erat a, atque exponens resistentiae brachystochronae duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrona. Curva ergo brachystochrona quoque ad tautochronismum producendum accommodari potest arcu ascensus descensui tributo in medio resistente, cuius exponens est duplo minor.

COROLLARIUM 6

726. Ad inveniendam continuationem curvae MA ultra A poni debet s negativum, quo facto habebitur

$$ax = 2k^2\left(e^{\frac{-s}{2k}} - 1\right) + ks$$

vel

$$2ax = \frac{s^2}{1\cdot 2} - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4k^2} - \text{etc.}$$

Quae eadem aequatio prodiisset, si k negativum fecissemus. Facto autem k negativo descensus mutatur in ascensum; quocirca curva MA ultra A continuata ascensui inserviet atque super ea omnes ascensus eodem absolventur tempore, scilicet $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIUM 7

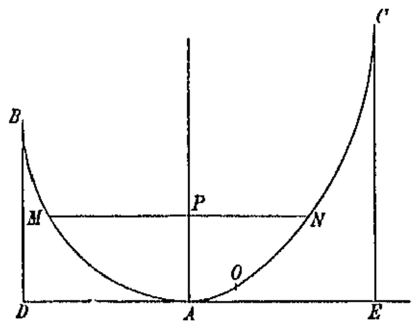


Fig. 88

727. Eadem ergo curva continua $BMANC$ (Fig. 88) erit tautochrona tam pro descensu quam pro ascensu. Namque super arcu BMA omnes descensus eodem tempore absolvuntur atque super arcu ANC omnes ascensus. Quare omnes dimidiae oscillationes, quae in arcu BMA incipiunt, erunt inter se isochronae atque tempus unius semioscillationis erit $=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIUM 8

728. Si resistentia evanescit, quo casu k fit ∞, curva haec in cycloidem abire debet, quae est curva tautochrona in vacuo. Hoc ipsum aequatio per seriem expressa indicat; fit enim $2ax=\frac{s^2}{1\cdot 2}$ seu $4ax=s^2$, aequatio pro cycloide.

COROLLARIUM 9

729. Curva ergo $BMANC$ prout cyclois habebit cuspides verticales in B et C, ad quas inveniendas ponatur $dx=ds$, eritque pro arcu BMA

$$a=k\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right) \quad \text{seu} \quad s=2kl\frac{a+k}{k}=AMB;$$

atque eius altitudo BD erit

$$=2k-\frac{2k^2}{a}l\frac{a+k}{k}.$$

Pro arcu ascensus vero ANC erit

$$ANC=2kl\frac{k}{k-a} \quad \text{et} \quad CE=\frac{2k^2}{a}l\frac{k}{k-a}-2k.$$

Sive per series erit

$$BD = a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$$

atque

$$CE = a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 10

730. Ex his perspicitur cuspidem C arcus ascensus elevatiorem esse cuspide A arcus descensus. Atque arcus ANC cuspis in infinitum abit, si $k = a$; et si $a > k$, cuspis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet tam BD quam CE esse diametros curvae inventae.

COROLLARIUM 11

731. Si corpus in dimidia oscillatione habuerit celeritatem altitudini debitam, erit arcus descensus

$$= 2kl\frac{k\sqrt{g}}{k\sqrt{g} - \sqrt{ab}}$$

[§ 723] seu per seriem

$$= \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

atque sequens arcus ascensus

$$= 2kl\frac{k\sqrt{g} + \sqrt{ab}}{k\sqrt{g}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2g} - \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

COROLLARIUM 12

732. Si ergo descensus fiat ex puncto B, ita ut arcus

$$= AMB = 2kl\frac{a+k}{k},$$

erit

$$b = \frac{gak^2}{(a+k)^2};$$

sequentis vero ascensus arcus erit

$$= 2kl\frac{2a+k}{a+k}.$$

COROLLARIUM 13

733. Ex aequatione pro hac curva apparet curvam in puncto A habituram esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds constante radius osculi in M sit

$$=\frac{dsdy}{ddx}=\frac{ds\sqrt{(ds^2-dx^2)}}{ddx},$$

quia est [§ 719]

$$dx=\frac{k}{a}\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right)ds,$$

erit

$$ddx=\frac{1}{2a}e^{\frac{s}{2k}}ds^2$$

et

$$\sqrt{(ds^2-dx^2)}=ds\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{a^2}\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right)^2\right)};$$

erit radius osculi in M

$$=\frac{\sqrt{\left(4a^2-4k^2\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right)^2\right)}}{e^{\frac{s}{2k}}}.$$

Posito ergo $s=0$ erit radius osculi in puncto infimo A $=2a$. In B vero et C radius osculi evanescit.

COROLLARIUM 14

734. Radius osculi non est maximus in puncto infimo A; sed per methodum maximorum maximus invenitur in arcu ascensus idque in puncto O existente

$$AO=2kl\frac{k^2}{k^2-a^2}.$$

In hoc enim puncto est radius osculi

$$=\frac{2ak}{\sqrt{(k^2-a^2)}}.$$

Ex quo concluditur, nisi sit $k>a$, curvaturam curvae ANC perpetuo diminui neque punctum O usquam existere.

SCHOLION 2

735. Hoc igitur problemate duas invenimus curvas, super quarum altera omnes descensus, super altera vero omnes ascensus aequalibus absolvuntur temporibus. Atque cum super tota curva BAC omnes itus seu semioscillationes aequalibus peragantur temporibus, si quidem in curvae portione BA incipiant, haec curva ad oscillationes in fluido isochronas faciendas esset idonea, si modo reditus quoque inter se essent isochroni, de quo vero non constat. Quia autem in fluidis praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem alia insuper observatur, quam momentis temporum proportionalem seu constantem esse probabile est, etiam coniunctim cum ista resistentia tautochronam determinare operae pretium est; quod vero facile ex praecedente effici potest. Sit enim resistentia constans $=h$; erit pro descensu

$$dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}.$$

Quare si in priore operatione tantum loco gdx ubique $gdx - hds$ substituatur, tautochrona satisfaciens simili modo obtinebitur; pro descensu scilicet prodibit ista curva

$$ax = \left(\frac{ah}{g} - k\right)s + 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)$$

atque pro ascensu vero haec

$$ax = \left(k - \frac{ah}{g}\right)s + 2k^2\left(e^{\frac{-s}{2k}} - 1\right);$$

quae curva quoque cum priore eandem curvam continuam constituit; abit enim altera in alteram ponendo s negativum. Notandum hic est, si fuerit $k = \frac{ah}{g}$, fore curvam tautochronam tractoriam BAF (Fig. 82, p. 356) asymtotam habentem horizontalem CE, quae a puncto A distet intervallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. Fili autem longitudo, quo haec tractoria describitur, est $=2k$.

Quod autem super huiusmodi curva tangentem horizontalem nusquam habente semioscillatio absolvi possit atque alicubi punctum aequilibrii A existere, mirum non est, cum, ut supra iam observavimus, in tali resistentiae hypothesi corpus in loco subsistere queat declivi. His autem casibus, quibus curva ultra A descendere pergit, nulli reditus atque ideo nullae oscillationes peragi possunt, quia corpus, quanquam super plano declivi ad quietem pervenire potest, tamen super eo ascendere nequit; in quovis enim curvae portionis AF puncto corpus in quiete perseverare potest.

SCHOLION 3

736. Non multo difficilior fit problematis solutio, si potentia deorsum tendens non constans, sed variabilis utcunque P atque exponens resistentiae etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento temporis in descensu

$$\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}\sqrt{\left(b-\int e^{-\int\frac{ds}{q}}P\,dx\right)}}.$$

Si nunc ut ante [§ 719] ponatur

$$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}P\,dx=t \quad \text{et} \quad \frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}}=du,$$

debebit quoque esse

$$du=\frac{a\,dt}{\sqrt{t}} \quad \text{seu} \quad t=\frac{a^2dt^2}{du^2}=\frac{a^2P^2dx^2}{e^{\int\frac{ds}{q}}ds^2}.$$

Quae aequatio denuo differentiata posito ds constante et loco dt eius valore substituto dabit

$$\frac{q\,ds^2}{2a^2}=Pq\,ddx+q\,dP\,dx-\frac{1}{2}P\,dx\,ds\text{[1]})$$

pro curva descensus isochronos habente. Huiusque curvae continua ultra A ascensibus inserviet.

SCHOLION 4

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistentiae quadratis celeritatum proportionalis primus ego dedi in Comment. tomo IV, ubi eadem qua hic sum usus methodo.[2]) Deinceps vero etiam Cel. IOH. BERNOULLI mihi per litteras significavit se quoque in eadem resistentiae hypothesi istam tauto-

---

1) Editio princeps: $\frac{q\,ds^2}{2a^2}=Pq\,ddx+q\,dP\,dx-2P\,dx\,ds$. Correxit P. St.

2) L. EULERI Commentatio 13 (indicis ENESTROEMIANI): *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 67; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

chronam repperisse[1]); cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730.[2]) In aliis vero resistentiae hypothesibus excepta ea, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tautochronas determinavit. Quod enim ad eas curvas attinet, quas in Act. Lips. A. 1726 tautochronarum nomine dedi[3]), eae quaesito non satisfaciunt, uti Cel. HERMANNUS, qui primum in easdem inciderat[4]), atque ego postea monstravimus.[5]) Difficultas autem methodi huius tautochronas inveniendi in hoc consistit, quod in aliis resistentiae hypothesibus celeritas non possit universaliter ex aequatione canonica determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tautochronae investigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro mediis rarissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus tautochronae inveniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82

PROBLEMA

738. *In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypothesi potentiae uniformis deorsum tendentis determinare curvam tautochronam AM* (Fig. 80, p. 352), *super qua vel omnes descensus vel ascensus aequalibus absolvantur temporibus.*

SOLUTIO

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$ sit totus arcus descensu aliquo descriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$, altitudo celeritati

1) Vide litteras ab IOH. BERNOULLI 27. Dec. 1729 ad LEONHARDUM EULERUM datas, quas G. ENESTROEM edidit Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 378. P. St.

2) IOH. BERNOULLI, *Méthode pour trouver les tautochrones, dans les milieux résistans comme le quarré des vitesses*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1730, p. 78; *Opera omnia*, Tom. 3, Lausannae et Genevae 1742, p. 173. P. St.

3) L. EULERI Commentatio 1 (indicis ENESTROEMIANI): *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*, Acta erud. 1726, p. 361; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

4) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpora indesinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139; vide praecipue p. 158. P. St.

5) Vide notam 2 p. 366. P. St.

in M debita sit $= v$, exponens resistentiae $= k$ atque ipsa resistentiae vis $\frac{v^m}{k^m}$, ubi k est quantitas valde magna, ita ut fractiones, quae in denominatore k plurium quam m dimensionum habent, pro evanescentibus haberi queant. His positis erit ex natura descensus

$$dv = -g\,dx + \frac{v^m ds}{k^m}.$$

Iam si resistentia prorsus abesset, curva quaesita esset cyclois, cuius aequatio est

$$gx = \alpha s^2;$$

quia autem medium est rarissimum, curva quaesita non multum a cycloide differet; ponatur igitur aequatio pro curva quaesita haec

$$gx = \alpha s^2 + \frac{\beta s^n}{k^m}.$$

Quia vero est

$$dv = -g\,dx + \frac{v^m ds}{k^m},$$

propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde parvum erit proxime

$$v = C - gx = C - \alpha s^2 - \frac{\beta s^n}{k^m},$$

ubi constans C ex hoc determinatur, quod, si fit $s = f$, fiat $v = 0$. Quocirca erit

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) \text{ quam proxime.}$$

Ponatur ergo

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + Q;$$

erit

$$dv = -2\alpha s\,ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -g\,dx + \frac{v^m ds}{k^m}$$

$$= -2\alpha s\,ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)^m ds}{k^m}$$

neglectis reliquis terminis, qui pro v^m poni deberent, quia in iis k plures quam m in denominatore habet dimensiones. Ex his iam sequitur fore

$$Q = \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds$$

integrali hoc ita accepto, ut evanescat posito $s=f$. Erit ergo

$$v=\alpha(f^2-s^2)+\frac{\beta}{k^m}(f^n-s^n)+\frac{\alpha^m}{k^m}\int(f^2-s^2)^m ds$$

atque hinc

$$\frac{1}{\sqrt{v}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}-\frac{\beta(f^n-s^n)+\alpha^m\int(f^2-s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

omittendis iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc prodibit tempus

$$\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}-\frac{\beta}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

quod ita integratum, ut evanescat posito $s=0$, dabit tempus, quo corpus descendens arcum $MA=s$ absolvit. Totum ergo descensus tempus per arcum f obtinebitur, si post integrationem ponatur $s=f$; quod tempus debet esse constans seu ita comparatum, ut non pendeat ab f. Primus autem temporis terminus

$$\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$$

posito post integrationem $s=f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua non amplius inest f; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. Quamobrem si duo reliqui termini ita essent comparati, ut, postquam positum est $s=f$, sese destruant, quaesito foret satisfactum; haberetur enim pro integro descensus tempore haec expressio $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$, quae est constans. Debebit ergo esse

$$\beta\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=-\alpha^m\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

posito post integrationem $s=f$. Dat autem

$$\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

posito $s=f$ multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $n-2$, atque alterum integrale

$$\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

posito $s=f$ dat multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $2m-1$. Fiat igitur $n=2m+1$ atque β ita sumatur, ut hae duae potestates ipsius f, quarum utriusque exponens erit $2m-1$, sese destruant. Quo autem appareat, quales coefficientes habiturae sint istae ipsius f potestates, ex casibus simplicioribus concludemus. Integratis igitur sequentibus formulis, ita ut evanescant posito $s=0$, tumque facto $s=f$ reperietur

$$\int\frac{(f-s)\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=f^{-1}\quad\text{atque}\quad\int\frac{(f^3-s^3)\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{1}f^1\quad\text{et}\quad\int\frac{(f^5-s^5)\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}f^3;$$

hincque erit generaliter

$$\int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}f^{2m-1},$$

unde erit

$$\beta\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}\beta f^{2m-1}.$$

Alterius termini coefficiens ex eadem analogia innotescet. Est enim integratione ita instituta, ut integrale evanescat posito $s=0$, per seriem

$$\int(f^2-s^2)^m ds=-f^{2m}(f-s)+\frac{m}{1\cdot 3}f^{2m-2}(f^3-s^3)-\frac{m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 5}f^{2m-4}(f^5-s^5)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7}f^{2m-6}(f^7-s^7)-\text{etc.}$$

Haec igitur series in

$$-\frac{\alpha^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

ducta et integrata atque tum posito $s=f$ dabit

$$\alpha^m f^{2m-1}\left(1-\frac{2m}{1\cdot 3}+\frac{4m(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{8m(m-1)(m-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\text{etc.}\right)=\frac{\alpha^m f^{2m-1}}{2m+1}.$$

His igitur duobus valoribus inter se aequatis prodit

$$\beta=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m-1)\alpha^m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2m(2m+1)},$$

quo valore loco β substituto habebitur pro curva tautochrona ad descensus

pertinente, posito $\frac{1}{a}$ loco a homogeneitatis ergo, sequens aequatio

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)s^{2m+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m(2m+1)a^m k^m}.$$

Vel si ex x desideretur s, hinc oritur ista aequatio

$$s = \sqrt{gax} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)g^m a x^m}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m(2m+1)2k^m}.$$

Atque tempus uniuscuiusque descensus super hac curva erit $=\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$ seu longitudo penduli in vacuo a gravitate naturali $= 1$ sollicitati eodem tempore descensus absolventis erit $=\frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curva tautochrona mutatur in aequationem pro curva, super qua omnes ascensus aequalibus temporibus, tempore scilicet $\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$, absolvuntur, si loco k^m scribatur $-k^m$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

739. Si $2m+1>2$ seu $m>\frac{1}{2}$, curvae radius osculi in puncto A idem erit qui pro aequatione $gx=\frac{s^2}{a}$, scilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo casibus corpus minimum descensum absolvit eodem tempore quo in vacuo; seu descensus super infima curvae portiuncula infinite parva idem erit in vacuo et in medio resistente, si modo $m>\frac{1}{2}$.

COROLLARIUM 2

740. Si $m=\frac{1}{2}$, in utroque termino s habebit duas dimensiones. Quare radius osculi in A non amplius erit $\frac{ga}{2}$, sed eo erit minor. In hoc ergo medio, quod in ratione celeritatum resistit, tempus descensus minimi per arculum circularem maius erit quam in vacuo hocque in data ratione.

COROLLARIUM 3

741. Si m fuerit $<\frac{1}{2}$, verum tamen >0, radius osculi in A erit infinite parvus; super hac ergo curva in vacuo minimus descensus absolveretur tempore infinite parvo, cum in medio resistente finito tempore perficiatur.

SCHOLION 1

742. Quod ad hunc casum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc, quod diximus, quidem ex aequatione sequitur, quam in medio rarissimo quaesito plene satisfacere ponimus. In casu autem, quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini, ex quibus aequatio consistit, etiamsi medium sit rarissimum, non satisfaciunt. Duo enim termini, quibus gx aequatur, considerari debent tanquam duo termini initiales seriei convergentis, in qua sequentes prae primis evanescant. Tota vero series huiusmodi habebit formam

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}} + \text{etc.},$$

in qua exponentes ipsius s in progressione arithmetica progrediuntur; haecque forma partim ex analogia, partim ea ipsa ratione, qua ad secundum terminum inveniendum usi sumus, colligi potest. Ex hac iam forma apparet curvae in puncto infimo A conditionem, si $m < \frac{1}{2}$, ex duobus terminis primis cognosci non posse, quantumvis k sit magnum. Quia enim exponentes ipsius s decrescunt, in sequentibus terminis s tandem in denominatorem migrabit ideoque posito $s = 0$ fiet $x = \infty$, ex quo apparet curvam his casibus in A non terminari neque radium osculi in hoc loco posse definiri. Quod incommodum non habet locum, si exponentes ipsius s crescunt.

SCHOLION 2

743. Hinc igitur patet modus curvam tautochronam in medio in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistente inveniendi, etiamsi medium non fuerit rarissimum. Cum enim aequatio pro tautochrona sit huius formae

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}} + \text{etc.},$$

quemadmodum ex conditione tautochronismi valorem coefficientis A determinavimus, eodem modo etiam coefficientes reliquorum terminorum poterunt definiri. At propter tantopere compositas formulas integrales labor fere fit insuperabilis, qui autem forte sublevabitur, si quis tantum unicum coefficientem B vel ad summum duos B et C determinandi operam adhibuerit, quoniam sequentes ex analogia concludi possent. Ad haec accedit, quod haec

series in casu, quo $m=1$, cognita sit, quippe ex superioribus (§ 724) habemus

$$gx=\frac{s^2}{a}+\frac{s^3}{6ak}+\frac{s^4}{48ak^2}+\frac{s^5}{480ak^3}+\text{etc.},$$

quae series ad generalem inveniendam non parum subsidii afferet. Terminus vero B inveniri debet ex sequente aequatione

$$B\int\frac{(f^{4m}-s^{4m})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{4}A^2\int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})^2ds}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3}{2}A\int\frac{ds(f^{2m+1}-s^{2m+1})\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+\frac{3}{4}\int\frac{ds\left(\int ds(f^2-s^2)^m\right)^2}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}-mA\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}(f^{2m+1}-s^{2m+1})}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$
$$-m\int\frac{ds\int ds\,(ff-ss)^{m-1}\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius aequationis integralia ita sunt sumenda, ut evanescant posito $s=f$, quo facto poni debet $s=0$; atque tum valor ipsius B invenietur. Coefficiens vero A iam cognitus est; invenimus enim

$$A=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m(2m+1)}.$$

Pro casu, quo $m=1$, superiorem aequationem evolvi invenique $B=\frac{1}{48}$ existente $A=\frac{1}{6}$, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in infinitum innotescerent, tum haberetur quidem aequatio serie infinita constans pro tautochrona quaesita; quae autem, si eius lex cognita fuerit, per methodum meam series summandi[1]) in aequationem terminorum numero finito constantem transformari poterit. Atque hanc propemodum unicam et tutissimam iudico methodum, cuius ope tautochronae in aliis resistentiae hypothesibus inveniri queant.

COROLLARIUM 4

744. Si igitur aequatio

$$gx=\frac{s^2}{a}+\frac{As^{2m+1}}{a^mk^m}+\frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}}+\text{etc.}$$

---

1) L. EULERI Commentatio 25 (indicis ENESTROEMIANI): *Methodus generalis summandi progressiones*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 68; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 14. P. St.

exprimat tautochronam descensuum, ascensus tautochronos producet ista curva

$$gx = \frac{s^2}{a} - \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} - \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}} + \text{etc.},$$

quae oritur ponendo k^m negativum.

COROLLARIUM 5

745. Perspicitur hinc, quoties m fuerit numerus integer, toties tautochronam ascensibus inservientem ANC (Fig. 83, p. 362) esse continuam tautochronae descensuum BMA. Eadem enim aequatio oritur, sive k^m sive s ponatur negativum.

COROLLARIUM 6

746. Praeterea intelligitur curvam ANC, super qua omnes ascensus eodem tempore absolvuntur quo descensus super curva BMA, minus esse curvam quam BMA et cuspidem C altius habere positam, quemadmodum in medio, quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

COROLLARIUM 7

747. In medio, quod in simplici ratione celeritatum resistit, omnes ipsius s exponentes fiunt $= 2$; ex quo sequitur tam tautochronam descensuum quam ascensuum esse semicycloides. Ea vero pro ascensu, quia s^2 minorem habet coefficientem quam pro descensu, maiore circulo erit genita, si quidem tempora ascensuum aequalia esse debeant temporibus descensuum. Interim vero eadem cyclois continua semioscillationes quoque producit isochronas; ascensuum vero tempora erunt minora quam tempora descensuum.

SCHOLION 3

748. Si m est numerus integer, facile ex data forma potest ipsius A valor definiri. Namque si $m = 1$, erit $A = \frac{1}{6}$, si $m = 2$, erit $A = \frac{3}{40}$ et ita porro. At si m non est numerus integer, difficilius est valorem A exhibere; series enim valorum ipsius A debet interpolari. Pro fractionibus quidem, quarum denominator est 2, valor ipsius A per quadraturam circuli potest definiri. Posito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter est 1, erit, ut sequitur:

$$\begin{array}{c|lllll} m & \frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{2}, & \frac{7}{2} & \text{etc.} \\ A & \frac{1}{\pi}, & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}, & \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{3\pi}, & \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{4\pi} & \text{etc.} \end{array}$$

Ex quo patet, si fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$, fore

$$A = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)\pi}$$

atque adeo

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot s^{2n+2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi a^m k^m},$$

existente scilicet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecunque autem m fuerit fractio, erit perpetuo

$$A = \frac{1}{(2m+1)^2 \int dz(1-z)^m}$$

hoc integrali ita accepto, ut evanescat posito $z = 0$, atque tum posito $z = 1$, quemadmodum docui in Comment. A. 1730, in Dissertatione *De progressionibus transcendentibus.*[1])

COROLLARIUM 8

749. Si nunc pro singulis mediis resistentibus rarissimis quaerantur tautochronae descensuum, eae se habebunt, ut sequitur:

$$\begin{array}{r|l}
m = 0 & gx = \dfrac{s^2}{a} + s \\[2ex]
m = \dfrac{1}{2} & gx = \dfrac{s^2}{a} + \dfrac{s^3}{\pi\sqrt{ak}} \\[2ex]
m = 1 & gx = \dfrac{s^2}{a} + \dfrac{s^3}{6ak} \\[2ex]
m = \dfrac{3}{2} & gx = \dfrac{s^2}{a} + \dfrac{s^4}{3\pi ak\sqrt{ak}} \\[2ex]
m = 2 & gx = \dfrac{s^2}{a} + \dfrac{3s^5}{40a^2k^2} \\[2ex]
m = \dfrac{5}{2} & gx = \dfrac{s^2}{a} + \dfrac{8s^6}{45\pi a^2k^2\sqrt{ak}} \\[2ex]
m = 3 & gx = \dfrac{s^2}{a} + \dfrac{5s^7}{112a^3k^3}.
\end{array}$$

Ex his formabuntur tautochronae ascensuum, si ultimi termini fiant negativi.

1) L. EULERI Commentatio 19 (indicis ENESTROEMIANI): *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/1), 1738, p. 36; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14. P. St.

SCHOLION 4

750. Haec igitur sufficiant de tautochronis simplicibus, super quibus vel omnes descensus tantum vel omnes ascensus aequalibus absolvuntur temporibus. Praeter has autem curvas etiam aliae tautochronarum nomine appellari possunt, super quibus vel omnes semioscillationes vel etiam solum omnes integrae oscillationes sint isochronae; quarum curvarum numerus uti etiam in vacuo est infinitus. Quod autem ad integras oscillationes attinet, haec quaestio resistentiae propria est; in vacuo enim omnes semioscillationes inter se sunt aequales. Quia autem in his quaestionibus duae curvae inveniendae proponuntur, quarum altera ad ascensus, altera ad descensus pertineat, antequam huiusmodi quaestiones pro tautochronismo solvamus, alias faciliores propositiones circa binas curvas ascensum et descensum spectantes praemittemus.

PROPOSITIO 83

PROBLEMA

751. *In hypothesi potentiae uniformis deorsum tendentis et medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, data curva MA* (Fig. 84) *invenire alteram AN illi in A iungendam huius indolis, ut corpus per arcum quemcunque MA super curva data descendens super curva quaesita ascensu conficiat arcum AN, qui aequalis sit arcui MA.*

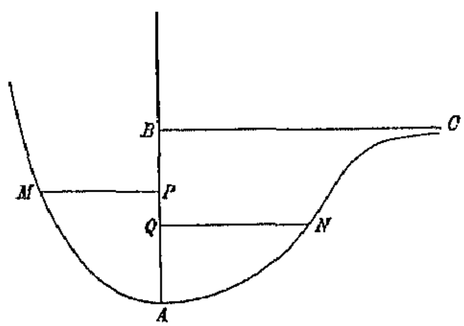


Fig. 84.

SOLUTIO

Positis potentia sollicitante g, exponente resistentiae k et celeritate in A, quam ex descensu acquisivit quaque super curva quaesita AN ascensum inchoat, debita altitudini b sit pro curva data abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$; pro quaesita vero sit abscissa $AQ = t$ atque arcus $AN = r$. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)$$

et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita

$$= e^{\frac{-r}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt\right).$$

Integer ergo arcus descensus provenit ex hac aequatione

$$b = g\int e^{\frac{-s}{k}}dx,$$

integer vero arcus ascensus ex hac aequatione

$$b = g\int e^{\frac{r}{k}}dt.$$

Inter arcus igitur descensus et ascensus haec habebitur aequatio

$$\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \int e^{\frac{r}{k}}dt$$

seu huius differentialis

$$e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt.$$

Quare cum arcus ascensus aequalis esse debeat arcui descensus, ponatur $r = s$; quo facto prodibit ista aequatio

$$e^{\frac{-2s}{k}}dx = dt.$$

Cum autem curva MA data sit, dabitur aequatio inter s et x; ex qua, si loco dx eius valor per s et ds substituatur, prodibit aequatio inter t et s seu inter t et r propter $r = s$; quae determinabit naturam curvae quaesitae AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

752. Si curvae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x = \alpha s^n$, erit pro portione infima curvae AN haec aequatio

$$dt = \alpha n e^{\frac{-2s}{k}} s^{n-1}ds.$$

Est vero propter s arcum minimum

$$e^{\frac{-2s}{k}} = 1 - \frac{2s}{k},$$

unde erit

$$t = \alpha s^n - \frac{2\alpha n s^{n+1}}{(n+1)k}$$

seu tantum $t = \alpha s^n$. Portiones ergo infimae utriusque curvae erunt inter se similes.

COROLLARIUM 2

753. Ex aequatione $e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt$ intelligitur esse semper $dt < dx$ seu $t < x$. Punctum ergo N semper humilius erit positum quam punctum respondens M. Ex quo sequitur curvam AN minus esse curvam versus AB quam curvam AM.

COROLLARIUM 3

754. Hanc ob rem curva ANC non poterit esse similis et aequalis curvae AM, quia hoc casu puncta M et N arcus aequales AM et AN terminantia forent in eadem altitudine sita.

COROLLARIUM 4

755. Si corpus super curva MA ex altitudine infinita descenderet, quia in A celeritatem tantum finitam acquirit, ad altitudinem tantum finitam ascendere poterit. Hoc ergo casu, quo curva AM in infinitum porrigitur, curva ANC non ultra datam altitudinem ascendere poterit, sed asymtoton habebit horizontalem BC. Id quod etiam ex hoc apparet, si fit $s = \infty$; tum enim prodit $dt = 0$.

SCHOLION 1

756. Quemadmodum ex hac propositione intelligitur, quomodo ex data curva descensuum MA inveniri debeat curva ascensuum AN, ita vicissim hinc facile erit ex data curva AN alteram definire. Si enim detur aequatio inter t et s, erit

$$dx = e^{\frac{2s}{k}} dt$$

aequatio pro curva AM.

COROLLARIUM 5

757. Quia curvae descensuum MA respondet curva ascensuum AN, cuius haec est aequatio

$$dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx,$$

ita, si haec curva AN pro curva descensuum accipiatur, erit respondentis curvae ascensuum abscissa

$$= \int e^{\frac{-2s}{k}} dt = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx.$$

COROLLARIUM 6

758. Si hoc modo ulteriores curvae respondentes quaerantur, obtinebitur sequens aequationum series:

Abscissa curvae respondens arcui s

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & = x, \\
\mathrm{II} & = \int e^{\frac{-2s}{k}} dx, \\
\mathrm{III} & = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx, \\
\mathrm{IV} & = \int e^{\frac{-6s}{k}} dx, \\
\vdots & \quad \vdots \\
n & = \int e^{\frac{-2(n-1)s}{k}} dx.
\end{array}$$

COROLLARIUM 7

759. Huius igitur seriei duae curvae contiguae hanc habebunt ---
tatem, ut iis in infimo puncto A coniunctis corpus super priori d
super altera per arcum ascendat aequalem arcui descensus. I
autem huius seriei curva facto $n = \infty$ fit recta horizontalis, quia
$e^{\frac{-\infty s}{k}}$ ideoque ipsa curvae abscissa.

EXEMPLUM 1

760. Sit linea data recta verticalis; erit $x = s$. Pro curva ergo ascensuum quaesita ANE (Fig. 85) existente $AQ = t$ et $AN = s$ habebitur ista aequatio

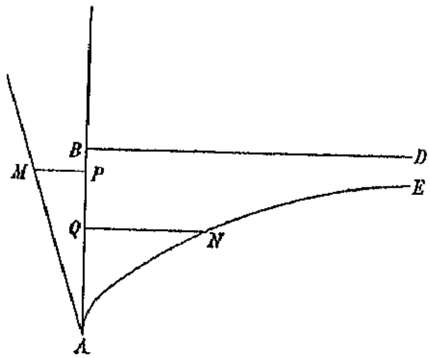


Fig. 85.

$$dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds \quad \text{seu} \quad t = \frac{k}{2}\left(1 - e^{\frac{-2s}{k}}\right).$$

Atque eliminata quantitate exponentiali erit

$$2tds = kds - kdt \quad \text{sive} \quad \frac{(\frac{1}{2}k - t)ds}{dt} = \frac{1}{2}k.$$

Ex qua aequatione perspicitur curvam ANE esse tractoriam super asymtoto horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo asymtoti AB erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipsa tractoria ANE pro curva descensuum accipiatur, ei respondebit curva quaesita, cuius abscissa arcui s respondens erit $= \int e^{\frac{-4s}{k}} ds$; quae ergo curva iterum erit tractoria asymtoton horizontalem habens, cuius asymtotos supra A elevata est intervallo $\frac{1}{4}k$, cui longitudo fili aequatur. Seriei vero superioris omnes curvae erunt tractoriae, quae filis generantur, quorum longitudines constituunt hanc seriem $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc. Recta scilicet verticalis tanquam tractoria considerari potest, cuius filum generans est $\frac{k}{0}$ seu infinitum. Ultima autem huius seriei tractoria in rectam abit horizontalem per A ductam.

EXEMPLUM 2

761. Si linea descensuum data fuerit recta utcunque ad horizontem inclinata MA (Fig. 85), ita ut sit $MA(s) : AP(x) = \alpha : 1$ seu $dx = \frac{ds}{\alpha}$, habebitur pro curva quaesita AN ista aequatio

$$\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds,$$

cuius integralis est

$$\alpha t = \frac{k}{2}\left(1 - e^{\frac{-2s}{k}}\right).$$

Ex quibus aequationibus coniunctis oritur

$$2\alpha t ds = k ds - \alpha k dt \quad \text{seu} \quad \frac{\left(\frac{k}{2\alpha} - t\right) ds}{dt} = \frac{k}{2}.$$

Quae aequatio quoque est pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ super asymtoto horizontali BD genita existente $AB = \frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A transire debet. Seriei sequentes curvae omnes sunt quoque tractoriae ut in praecedente exemplo, quarum fila generantia sunt $\frac{k}{0}$, $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{4}$, $\frac{k}{6}$ etc., earum vero asymtotorum a puncto A distantiae tenent hanc progressionem $\frac{k}{0\alpha}$, $\frac{k}{2\alpha}$, $\frac{k}{4\alpha}$, $\frac{k}{6\alpha}$ etc. Hae scilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum constituent aequalem angulo PAM.

COROLLARIUM 8

762. Tractoriarum harum ea, quae primam seu rectam MA praecedit, hanc ergo habebit proprietatem, ut corpus super ea descendens posteaque super recta AM ascendens aequalia spatia percurrat.

COROLLARIUM 9

763. Ad curvam igitur descensuum CA (Fig. 86) inveniendam, cui respondeat recta inclinata AM, super asymtoto horizontali filo longitudinis $\frac{k}{2}$ describatur tractoria CA in eaque sumatur applicata $Ab = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A constituatur recta inclinata AM; eritque CA curva descensuum, cui respondet recta AM pro ascensibus.

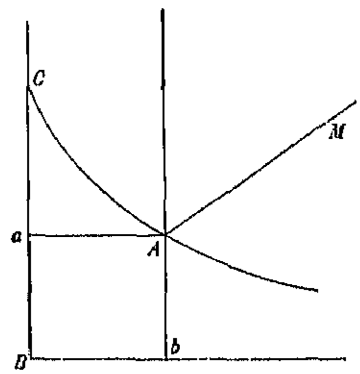


Fig. 86.

SCHOLION 2

764. Inservire potest hic casus instar exempli problematis inversi, quo ex data curva ascensuum curva descensuum requiritur.

EXEMPLUM 3

765. Sit curva descensuum data cyclois MA (Fig. 84, p. 376), cuius natura hac aequatione sit expressa

$$2ax = s^2$$

seu circuli genitoris diameter $=\frac{a}{2}$. Erit ergo

$$dx=\frac{sds}{a},$$

unde pro curva altera ascensuum AN haec invenitur aequatio

$$adt=e^{\frac{-2s}{k}}sds,$$

cuius integralis est

$$at=\frac{k^2}{4}\left(1-e^{\frac{-2s}{k}}\right)-\frac{k}{2}e^{\frac{-2s}{k}}s,$$

quae propter

$$e^{\frac{-2s}{k}}=\frac{adt}{sds}$$

abit in hanc

$$atsds=-\frac{ak^2dt}{4}+\frac{k^2sds}{4}-\frac{aksdt}{2}.$$

Haec curva in A, ut iam est dictum, tangentem habebit horizontalem. Habebit vero etiam asymtoton BC horizontalem; cuius altitudo BA reperietur, si s fiat $=\infty$. Fiet autem hoc casu $e^{\frac{-2s}{k}}=0$; quare erit $t=AB=\frac{k^2}{4a}$. Ex hoc intelligitur curvam alicubi punctum flexus contrarii habere debere; quod invenietur, si posito dt constante ponatur $dds=0$. Hinc vero prodibit $1=\frac{2s}{k}$ seu $s=\frac{k}{2}$. Quare si sumatur arcus $AN=\frac{k}{2}$, erit N punctum flexus contrarii; cui respondet abscissa $AQ=\frac{k^2}{4a}-\frac{k^2}{2ae}$ seu $BQ=\frac{k^2}{2ae}$. Quo circa erit semper $AB:BQ=e:2=2{,}71828:2$.

SCHOLION 3

766. Problema hoc propositum extat ab anonymo in Act. Lips. A. 1728[1]) eiusque solutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 1729 Cl. D. BERNOULLI[2]) alia usus methodo. Praeter hanc vero conditionem anonymus ille potissimum requirit unam curvam continuam, cuius alter ramus descensibus, alter ascensibus inserviat, cuiusmodi curvae dantur innumerabiles, quas in sequente propositione detegemus.

1) *Problema geometris propositum*, Acta erud. 1728, p. 523. P. St.

2) DAN. BERNOULLI, *Theorema de motu curvilineo corporum, quae resistentiam patiuntur velocitatis suae quadrato proportionalem*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1730/1), 1735, p. 136. P. St.

PROPOSITIO 84

PROBLEMA

767. *Iisdem positis ut ante invenire curvam continuam* MAN (Fig. 84, p. 376) *huiusmodi, ut in quavis semioscillatione, quae semper in arcu* MA *incipiat, super ea facta arcus descensus* MA *aequalis sit arcui ascensus sequentis* AN.

SOLUTIO

Propositio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data fuerit curva MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod utraque curva MA et AN unam eandemque curvam continuam constituere debeant. Sumtis igitur arcubus AM et AN aequalibus $=s$ et posita $AP=x$ atque $AQ=t$ erit

$$dt=e^{\frac{-2s}{k}}dx.$$

Quia autem curva MAN debet esse continua, aequationem inter s et x ita oportet esse comparatam, ut, si in ea loco s ponatur $-s$, quo casu arcus AM in arcum AN abit, valor ipsius x fiat $=t$ seu

$$=\int e^{\frac{-2s}{k}}dx.$$

Pono igitur $dx=Mds$, ubi M sit functio quaedam ipsius s, eaque abeat in N, si loco s ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s, quo casu x abit in t, eritque $dt=-Nds$. Est vero quoque

$$dt=e^{\frac{-2s}{k}}dx=e^{\frac{-2s}{k}}Mds,$$

quocirca erit

$$N=-e^{\frac{-2s}{k}}M.$$

Sit porro

$$M=e^{\frac{+s}{k}}P$$

abeatque P in Q posito $-s$ loco s eritque

$$N=e^{\frac{-s}{k}}Q.$$

Quibus valoribus loco M et N substitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo apparet P huiusmodi esse debere functionem ipsius s, quae abeat in $-P$ posito $-s$ loco s, quas functiones impares appellare consuevi. Sit itaque P functio quaecunque impar ipsius s, cuiusmodi sunt e. gr. αs, αs^3, αs^5 etc., eritque

$$M = e^{\frac{s}{k}} P ds \quad \text{seu} \quad x = \int e^{\frac{s}{k}} P ds.$$

Quae est aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

768. Quia est

$$dx = e^{\frac{s}{k}} P ds,$$

erit sumendis logarithmis

$$l dx = \frac{s}{k} + l P + l ds.$$

Differentietur haec aequatio denuo posito ds constante prodibitque

$$\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P} \quad \text{seu} \quad kPddx = Pdxds + kdxdP.$$

Quae aequatio ab exponentialibus est libera.

COROLLARIUM 2

769. Quoniam P per s dari debet, aequatio inventa non habet variabiles inter se permixtas; quamobrem ea sufficit ad curvas in ea contentas construendas.

EXEMPLUM

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$; erit

$$ax = \int e^{\frac{s}{k}} s ds = k e^{\frac{s}{k}} s - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2,$$

quae est aequatio pro una et fortasse simplicissima curva satisfaciente. Haec vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in hanc

$$axsds = aksdx - k^2 adx + k^2 sds.$$

Vel exposito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio

$$ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1 \cdot 3k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 4k^2} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5k^3} + \text{etc.}$$

Haec ergo curva in A habet tangentem horizontalem eiusque radius osculi in hoc loco est a. Quia, ne curva fiat imaginaria, esse debet $dx < ds$, debebit esse $e^{\frac{s}{k}} s < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}} s$, quae expressio crescente s quoque crescit, aequalis a, ibi curva AM habebit tangentem verticalem atque punctum reversionis. Pro ramo AN posito $-s$ loco $+s$ haec habetur aequatio

$$ax = \int e^{\frac{-s}{k}} s ds \quad \text{seu} \quad dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}} s ds}{a}.$$

Quare quamdiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}} s < a$, curva non fit imaginaria. At si usquam $e^{\frac{-s}{k}} s = a$, ibi curva quoque habebit punctum reversionis et diametrum verticalem. Fieri autem potest, si a satis magnum accipiatur, ut $e^{\frac{-s}{k}} s$ semper minus sit quam a, quo casu curva AN in infinitum abibit asymtotonque habebit horizontalem BC. Fit autem $e^{\frac{-s}{k}} s = 0$ casibus $s = 0$ et $s = \infty$; habebit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= 0$; hoc vero casu fit $k = s$ et

$$e^{\frac{-s}{k}} s = \frac{k}{e}.$$

Quare si fuerit $a > \frac{k}{e}$, curva habebit asymtoton BC, cuius altitudo BA erit $= \frac{k^2}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{e}$, curva AN uti alter ramus habebit quoque punctum reversionis, quod ex hac aequatione determinabitur

$$a = e^{\frac{-s}{k}} s.$$

In priori casu curva AN habere debet punctum flexus contrarii, quod reperietur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85

PROBLEMA

771. *In hypothesi gravitatis et resistentiae praecedente si data fuerit curva MA (Fig. 84, p. 376), super qua descensus absolvantur, invenire pro ascensibus curvam AN huius proprietatis, ut ascensus cuiusque tempus aequale sit tempori descensus praecedentis.*

SOLUTIO

Positis ut ante potentia sollicitante $=g$ et medii exponente $=k$ sit pro curva MA abscissa $AP=x$, arcus $AM=s$ atque pro curva quaesita AN abscissa $AQ=t$, arcus $AN=r$. Ponatur altitudo celeritati descensu quodam in A acquisitae debita $=b$, qua celeritate corpus sequentem ascensum in curva AN absolvet. His positis erit altitudo celeritati in M debita

$$=e^{\frac{s}{k}}\left(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)$$

et altitudo in ascensu celeritati in N debita

$$=e^{\frac{-r}{k}}\left(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt\right).$$

Tempus ergo descensus per arcum MA erit

$$=\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)}}$$

et tempus ascensus per arcum AN

$$=\int\frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{\sqrt{\left(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt\right)}},$$

quae duo tempora, si post integrationem ponatur

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx=b \quad\text{atque}\quad g\int e^{\frac{r}{k}}dt=b,$$

debent esse aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = X,\quad g\int e^{\frac{r}{k}}\,dt = T$$

atque

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{2k}}\,dr = dR,$$

ubi X, T, S et R sint tales functiones, quae evanescant posito x, t, s et $r=0$. Efficiendum ergo est, ut haec duo integralia

$$\int\frac{dS}{\sqrt{(b-X)}} \quad \text{et} \quad \int\frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$$

fiant inter se aequalia, si post integrationem ponatur $X=b$ et $T=b$. At S et R uti et X et T sunt quantitates a b prorsus non pendentes atque eandem inter se relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit. Quaesito ergo satisfiet, si R fuerit talis functio ipsius T, qualis S est ipsius X. Vel sumto $R=S$ esse quoque debet $T=X$. Est vero

$$S = 2k\left(1-e^{\frac{-s}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad R = 2k\left(e^{\frac{r}{2k}}-1\right);$$

facto igitur $R=S$ erit

$$2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{atque} \quad r = 2kl\left(2-e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Quia autem hoc posito esse debet $X=T$ seu

$$e^{\frac{-s}{k}}\,dx = e^{\frac{r}{k}}\,dt,$$

fiet

$$t = \int e^{\frac{-s-r}{k}}\,dx.$$

Cum vero sit

$$e^{\frac{r}{k}} = \left(2-e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2 = 4-4e^{\frac{-s}{2k}}+e^{\frac{-s}{k}},$$

erit

$$t = \int\frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}\left(2-e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2} = \int\frac{dx}{\left(2e^{\frac{s}{2k}}-1\right)^2}.$$

Ex quibus ergo constructio curvae innotescit, quia sumto arcu

$$AN = r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)$$

huic respondet abscissa

$$AQ = t = \int \frac{dx}{\left(2e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2}.$$

Aequatio vero pro curva AN commodius invenietur ex data aequatione inter s et x. Nam quia est

$$s = -2kl\left(2 - e^{\frac{t}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad x = \int \frac{dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2},$$

si loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequatio inter t et r pro curva quaesita AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

772. Quia est $r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)$, erit

$$dr = \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{2 - e^{\frac{-s}{2k}}}.$$

Cum vero, ne curva AN fiat imaginaria, esse debeat $dr > dt$, curva AN eousque erit realis, quousque

$$ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)} \quad \text{seu} \quad ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}.$$

COROLLARIUM 2

773. Est vero $e^{\frac{s}{2k}}$ semper maius unitate; ex quo sequitur, ubi fuerit $ds > dx$, eo magis fore

$$ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}.$$

Quare si curva data fuerit realis, quaesita quoque semper erit realis.

COROLLARIUM 3

774. Cum sit $s = -2kl\left(2 - e^{\frac{r}{2k}}\right)$, erit

$$ds = -\frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{2 - e^{\frac{r}{2k}}} = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1},$$

unde facilius relatio inter ds et dx in computum duci potest.

COROLLARIUM 4

775. Ex solutione problematis simul apparet, quomodo eius inversum sit solvendum. Si enim curva ascensuum AN datur seu aequatio inter t et r, ex ea aequatio inter x et s formabitur ope aequationum

$$t = \int \frac{dx}{\left(2e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2} \quad \text{et} \quad r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

COROLLARIUM 5

776. Ad curvae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r valde exigua eritque $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, unde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo perspicitur curvarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et aequales.

EXEMPLUM 1

777. Sit linea descensuum data recta MA (Fig. 85, p. 380) utcunque inclinata, ut sit $s = \alpha x$ seu $ds = \alpha dx$. Cum nunc sit

$$ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2},$$

habebitur inter t et r pro curva quaesita ista aequatio

$$dr = \frac{\alpha dt}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{seu} \quad \alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}}dr - dr,$$

cuius integralis est

$$\alpha t = 4k\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right) - r.$$

Quae aequatio in seriem conversa dat

$$at = r - \frac{r^2}{1\cdot 2k} + \frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2k^2} - \frac{r^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4k^3} + \text{etc.}$$

ideoque in puncto infimo A est $dr = adt$. Curva haec alicubi habebit tangentem horizontalem, qui locus invenietur ponendo $dt = 0$; tum vero erit $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $at = 2k - 2kl2$. Atque si r fiat maius quam $2kl2$, valor ipsius dt fiet negativus ideoque curva iterum descendet, donec $-dt$ fiat $= dr$; hoc autem accidit, si est

$$1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}} \quad \text{seu} \quad r = 2kl\frac{2}{1-\alpha}.$$

At quia α non potest esse minus quam 1, si est $\alpha = 1$, tangens verticalis in infinitum ab A distabit, atque si $\alpha > 1$, ultra tangentem horizontalem nusquam habebit tangentem verticalem. Sed antrorsum ultra tangentem habebit verticalem, ubi est

$$r = -2kl\frac{1+\alpha}{2}.$$

Casu ergo, quo linea data est verticalis seu $\alpha = 1$, fit $r = 0$ seu tangens in A erit verticalis.

COROLLARIUM 6

778. Si s denotet totum arcum descensus, r exprimet totum arcum sequenti ascensu super curva AN (Fig. 84, p. 376) descriptum. Quare si detur arcus descensus s, reperietur arcus ascensus

$$r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Quoniam enim posuimus $T = X$, integros arcus descensus et ascensus litterae s et r denotant.

EXEMPLUM 2

779. Sit curva data MA ipsa tautochrona descensuum, quam ante pro eadem resistentiae hypothesi invenimus; habebit curva AN hanc proprietatem, ut omnes ascensus aequalibus quoque absolvantur temporibus, iisdem nempe, quibus descensus super MA. Quare curva AN erit ipsa tautochrona ascensuum cum curva MA continua iam ante inventa. Quo hoc autem ex isto

calculo ostendatur, sumamus aequationem pro curva tautochrona descensuum, quae est [§ 719]

$$\text{vel}\quad a\,dx = k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)ds \quad \text{vel} \quad ax = 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) - ks.$$

Cum nunc sit

$$ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{et} \quad e^{\frac{s}{2k}} = \frac{e^{\frac{-r}{2k}}}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2},$$

his substitutis erit

$$\frac{a\,dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2} = \frac{k\,dr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right)}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2}$$

seu

$$a\,dt = k\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right)dr.$$

Quae aequatio ex illa formatur, si pro x ponatur t atque $-r$ pro s. Quare haec curva AN est continua cum MA atque tautochrona ascensuum.

COROLLARIUM 7

780. Dato ergo arcu descensus s super tautochrona descensuum erit arcus ascensus sequentis super tautochrona ascensuum

$$r = 2k\,l\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Atque si descensus a cuspide tautochronae descensuum incipiat, cuius locum dat

$$e^{\frac{s}{2k}} = \frac{a+k}{k}$$

(§ 729), erit arcus ascensus

$$r = 2k\,l\,\frac{2a+k}{a+k},$$

ut supra invenimus (§ 732).

SCHOLION

781. Cum itaque tautochrona in hac resistentiae hypothesi quaesito satisfaciat atque sit curva continua, hinc ansam arripimus investigandi plures curvas continuas, quarum duo rami vices curvarum MA et AN sustinere queant; id quod in sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 86

PROBLEMA

782. *Iisdem positis ut ante invenire casus, quibus duae curvae MA et AN* (Fig. 84, p. 376), *super quibus descensus et sequentes ascensus aequalibus temporibus absolvantur, unam curvam continuam constituunt.*

SOLUTIO

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedente propositione usi sumus, scilicet $AP = x$, $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$, praeter duas aequationes ibi inventas

$$2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$$

effici debet, ut aequationes inter s et x et inter r et t sub eadem aequatione comprehendantur. Sumamus ad hoc novam variabilem z, ex qua punctum M in curva AM determinetur, ita ut, si z fiat negativum, eodem modo obtineatur punctum N in altera curva. Hanc ob rem s huiusmodi esse oportet functionem ipsius z, ut eadem, si loco z ponatur $-z$, det arcum AN, qui ob positionem negativam est $-r$, ita ut s abeat in $-r$ posito $-z$ loco z. Ponatur

$$e^{\frac{-s}{2k}} = 1 + Q;$$

erit

$$e^{\frac{r}{2k}} = 1 - Q$$

propter $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ ideoque Q erit functio impar ipsius z, quae in sui negativam abit facto z negativo. Erit itaque

$$e^{\frac{-s}{k}} = (1 + Q)^2 \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{k}} = (1 - Q)^2.$$

Porro autem esse debet

$$dx\,(1 + Q)^2 = dt(1 - Q)^2$$

atque x talis esse debet functio ipsius z, quae abeat in t posito z negativo. Ponatur $dx = M\,dz$ abeatque M in N facto z negativo; erit ergo

$dt = -Ndz$. Quamobrem fiet

$$M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2.$$

Sit ergo

$$M = P(1-Q)^2$$

existente P quoque = functioni impari ipsius z; atque tum fiet

$$N = -P(1+Q)^2$$

ideoque aequalia inter se erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$, uti requiritur. Sumtis ergo pro lubitu loco P et Q functionibus imparibus ipsius z erit

$$dx = Pdz(1-Q)^2 \quad \text{seu} \quad x = \int Pdz(1-Q)^2$$

atque

$$s = 2kl\frac{1}{1+Q}.$$

Unde innumerabiles oriuntur curvae MA, quarum partes continuae AN ascensus producunt isochronos respective descensibus super MA factis. Quia autem duae functiones occurrunt P et Q, determinetur altera, ut sit $Q = -z$; erit

$$s = 2kl\frac{1}{1-z} \quad \text{atque} \quad x = \int Pdz(1+z)^2.$$

In quarum posteriore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$, substituatur habebiturque aequatio inter x et s pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

783. Si $z = 0$, fit quoque $s = 0$. Quare integrale ipsius $Pdz(1+z)^2$ ita accipi debet, ut evanescat posito $z = 0$. Nam evanescente arcu s abscissa quoque x evanescere debet.

COROLLARIUM 2

784. Cum sit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$, erit

$$ds = \frac{2kdz}{1-z},$$

et quia est $dx = Pdz(1+z)^3$, erit

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)};$$

nisi ergo $P(1-z^2)(1+z)$ maius fuerit quam $2k$, curva erit realis.

COROLLARIUM 3

785. In puncto infimo A, quia evanescit z, erit

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P}.$$

Quare P talis esse debet functio impar ipsius z, ut ea, si $z=0$, minor sit quam $2k$; hoc autem evenire non potest, nisi P talis fuerit functio ipsius z, quae evanescat posito $z=0$, hocque casu tangens in A erit horizontalis.

EXEMPLUM 1

786. Quia P debet esse functio impar ipsius z, ponatur

$$P = \frac{az}{(1-z^2)^2}.$$

Quo posito erit

$$x = \int \frac{azdz}{(1-z)^2} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}.$$

Est vero

$$z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad dz = \frac{1}{2k} e^{\frac{-s}{2k}} ds \quad \text{atque} \quad 1 - z = e^{\frac{-s}{2k}}.$$

Quibus substitutis habebitur

$$dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}} ds \left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k}\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

Quae est aequatio pro curva tautochrona supra inventa, super cuius parte MA omnes descensus aequalibus absolvuntur temporibus, super parte autem altera AN omnes ascensus iisdem temporibus.

EXEMPLUM 2

787. Sit

$$P = \frac{6az - 2az^3}{(1-zz)^2};$$

erit

$$x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z)^2} = \frac{3az^2 + az^3}{1-z}.$$

Cum autem sit

$$z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad 1 - z = e^{\frac{-s}{2k}},$$

erit

$$x = \frac{a\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\left(4 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)}{e^{\frac{-s}{2k}}} = a\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\left(4e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) = a\left(4e^{\frac{s}{2k}} - \left(3 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\right).$$

Quae aequatio in seriem conversa dat

$$\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2} + \frac{s^5}{96k^3} - \frac{s^6}{640k^4} + \text{etc.} = bx$$

mutata constante a in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87

PROBLEMA

788. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis et medio uniformi in duplicata celeritatum ratione resistente si detur curva quaecunque MA* (Fig. 87, p. 396) *super qua corpus descensus absolvat, invenire curvam AN ei iungendam ad ascensus idoneam, ita ut omnes semioscillationes, quae super curva MAN fiunt, aequalibus absolvantur temporibus.*

SOLUTIO

Positis ut hactenus potentia sollicitante g et exponente resistentiae k sit curvae datae MA abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$, curvae vero quaesitae abscissa $AQ = t$, arcus $AN = r$. Incipiat nunc descensus in quocunque curvae MA puncto sitque celeritas in A acquisita debita altitudini b, qua celeritate corpus sequentem ascensum in curva AN absolvet. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)$$

et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita

$$= e^{\frac{-r}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt\right).$$

Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et AN percurruntur,

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}}dx\right)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{r}{2k}}dt\right)}},$$

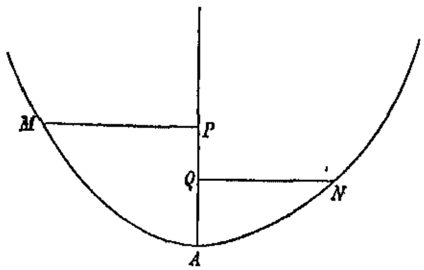


Fig. 87.

quae expressio integrum dabit semioscillationis tempus, si post integrationem ponatur

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = b \quad \text{atque} \quad g\int e^{\frac{r}{k}}dt = b.$$

Cum igitur hoc tempus debeat semper habere valorem constantem, qui non a quantitate litterae b pendeat, ex hac conditione determinari debebit aequatio inter t et r ope datae aequationis inter x et s. Ponamus brevitatis gratia

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = X \quad \text{et} \quad g\int e^{\frac{r}{k}}dt = T$$

atque

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS \quad \text{et} \quad \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR.$$

Quibus substitutis habere debebit

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$$

valorem constantem, si post integrationem ponatur $X = b$ et $T = b$. Fiat ergo generaliter $T = X$, quia T ab X non pendet; habebimus pro tempore hanc expressionem

$$\int \frac{dS + dR}{\sqrt{(b-X)}},$$

quae ita debet esse comparata, ut post integrationem facto $X = b$ littera b prorsus ex calculo evanescat. Hoc autem fiet, si fuerit

$$dS + dR = \frac{\alpha\, dX}{\sqrt{X}};$$

erit enim tempus semioscillationis

$$= \int \frac{\alpha\, dX}{\sqrt{(bX - XX)}} = \pi\alpha$$

denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit

$$\alpha = \frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{g}};$$

denotabit f longitudinem penduli in vacuo et gravitate $= g$ semioscillationes minimas eodem tempore absolventis, quo hae semioscillationes super curvis MA et AN peraguntur (§ 167). Cum igitur sit

$$dS + dR = \frac{dX\sqrt{2f}}{\sqrt{gX}},$$

erit

$$S + R = 2\sqrt{\frac{2fX}{g}} = 2\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\, dx.$$

Est vero

$$S = 2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad R = 2k\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right),$$

unde erit

$$k e^{\frac{r}{2k}} - k e^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\, dx$$

seu

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\, dx$$

ideoque fiet

$$r = 2kl\left(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\, dx\right).$$

Huic vero valori ipsius r respondens valor ipsius t ex hac aequatione determinabitur $T = X$ seu

$$e^{\frac{r}{k}}\, dt = e^{\frac{-s}{k}}\, dx.$$

Ex quo invenitur

$$t = \int \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{k}\, e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}\, dx}\right)^2},$$

ex quibus constructio curvae innotescit. Aequatio autem pro curva quaesita AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, si loco s substituatur

$$-2kl\left(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}\, dt}\right)$$

et loco x hic valor

$$\int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{-r}{2k}} \sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}\, dt}\right)^2}.$$

His enim substitutis orietur haec aequatio inter r et t, quae est pro curva quaesita AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

789. Cum oscillationes minimae congruant cum oscillationibus in vacuo, si curvae MA tangens in A non fuerit horizontalis vel si radius osculi in A fuerit infinite parvus, curvae quaesitae AN radius osculi in A erit $4f$. Erit enim hoc casu tempus descensus minimi $= 0$ et tempus ascensus $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

COROLLARIUM 2

790. Sin autem curvae MA in A radius osculi fuerit finitae magnitudinis, scilicet h, erit tempus descensus minimi $= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$ (§ 166). Quo igitur tempus semioscillationis sit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, erit radius osculi curvae AN in A $= (2\sqrt{f} - \sqrt{h})^2$; debet autem esse $h < 4f$ seu $f > \frac{1}{4}h$, ne curva AN fiat imaginaria.

COROLLARIUM 3

791. Curvae ergo MA et AN in A et tangentem horizontalem et radium osculi communem habebunt, si fuerit $f = h$. Hoc enim casu curvae AN radius osculi in A fiet quoque $= h$.

SCHOLION 1

792. Quemadmodum hic ex data curva descensuum curvam ascensuum determinavimus, ita perspicitur simili modo ex curva ascensuum data curvam descensuum inveniri posse; si enim detur aequatio inter t et r, quia est

$$s = -2kl\left(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}\,dt}\right)$$

atque

$$x = \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}\,dt}\right)^2},$$

his valoribus substituendis aequatio pro curva descensuum inter s et x obtinebitur.

COROLLARIUM 4

793. Cum f innumerabiles habere possit valores, modo sit $f > \frac{1}{4}h$, ad quamvis curvam sive descensuum sive ascensuum datam innumerae adiungi possunt curvae eiusmodi, ut semioscillationes super iis factae sint omnes isochronae, omnino uti in vacuo fieri potest.

COROLLARIUM 5

794. Quia in solutione posuimus $T = X$, hac aequatione relatio continetur inter quemque arcum descensus integrum et arcum respondentis ascensus. Ita, si arcus descensus fuerit s, erit arcus ascensus

$$r = 2kl\left(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx}\right).$$

EXEMPLUM 1

795. Sit linea descensuum data recta verticalis PA, pro qua est $s = x$. Erit ergo quoque $ds = dx$ atque

$$\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = k\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right).$$

Unde igitur fiet

$$r = 2kl\left(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right)\right)$$

seu

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right).$$

Porro autem est

$$t = \int \frac{ds}{\left(1 + e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\frac{2f}{k}}\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right)\right)^2} \quad \text{seu} \quad e^{\frac{t+s}{k}} dt = ds.$$

Eliminato ergo s prodibit pro curva ascensuum ista aequatio

$$(2f+k)^2 dt = k(2f-k)dr - \frac{2kf(2f+k)\,dr - 4fk^2 e^{\frac{r}{k}}\,dr}{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{\left(4ff + 2fk - 2fke^{\frac{r}{k}}\right)}},$$

in qua variabiles sunt a se invicem separatae, quare ea ad curvam construendam sufficit. Integratio vero huius aequationis a quadratura circuli pendet. Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ ista aequatio

$$dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}} \quad \text{seu} \quad t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)},$$

quae aequatio ad eam, quam in capite praecedente [§ 464] invenimus, reduci potest.

EXEMPLUM 2

796. Sit linea descensuum data ipsa tautochrona descensuum supra [§ 719] inventa, cuius aequatio est

$$a\,dx = k\,ds\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

Erit ergo

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a}\int ds\left(e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}}\right) = \frac{2k^2}{a}\left(\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-s}{k}}\right) = \frac{k^2}{a}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2$$

et

$$\sqrt{\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = \frac{k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)}{\sqrt{a}}.$$

Quamobrem fiet

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{\sqrt{2f} - e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f} + e^{\frac{-s}{2k}}(\sqrt{a} - \sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$$

atque

$$e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a} - \sqrt{2f}}{\sqrt{a} - \sqrt{2f}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}\, dr\sqrt{a}}{\sqrt{2f} - e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}}$$

atque

$$a\,dx = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}\,dr\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a} - \sqrt{2f}\right)^2}.$$

Cum autem porro sit

$$e^{\frac{-s}{k}}\,dx = e^{\frac{r}{k}}\,dt,$$

erit

$$ae^{\frac{r}{k}}\,dt = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}\,dr\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right)}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2} \quad \text{sive} \quad a\,dt = \frac{ak\,dr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right)}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2}$$

seu

$$(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2 dt = k\,dr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right),$$

ubi $\sqrt{2f}$ maius esse debet quam $\sqrt{a}$. Haec autem aequatio inventa comprehendit omnes tautochronas ascensuum; quae enim harum cunque cum tautochrona descensuum iungatur, super curva ex iis composita omnes semioscillationes debent esse isochronae. Si sumatur $f = 2a$, aequatio erit haec

$$a\,dt = k\,dr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right),$$

quae est pro tautochrona ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tempore absolvuntur quo descensus super tautochrona descensuum data, atque ea est continuatio tautochronae descensuum.

EXEMPLUM 3

797. Sit linea descensuum data MA tautochrona ascensuum et quaeratur, quales curvae cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio vero pro hac curva MA est

$$a\,dx = k\,ds\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Erit ergo

$$\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = \frac{k}{a}\int ds\left(e^{\frac{-s}{k}} - e^{\frac{-3s}{2k}}\right) = \frac{k^2}{a}\left(\frac{1}{3} - e^{\frac{-s}{k}} + \frac{2}{3}e^{\frac{-3s}{2k}}\right) = \frac{k^2}{3a}\left(1 - 3e^{\frac{-s}{k}} + 2e^{\frac{-3s}{2k}}\right)$$
$$= \frac{k^2}{3a}\left(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}}\right)\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2.$$

Ex his oritur

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)\sqrt{\frac{2f}{3a}\left(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}}\right)}$$

atque

$$t = \frac{k}{a}\int \frac{ds\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)}{\left(1 + \left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)\sqrt{\frac{2f}{3a}\left(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}}\right)}\right)^2},$$

ex quibus constructio curvae consequitur.

SCHOLION 2

798. Hoc exemplum ideo attulimus, ut appareat, cum quanam curva tautochronam ascensuum coniunctam esse oporteat, quo semioscillationes omnes aequalibus temporibus absolvantur. Ex formulis autem inventis apparet curvam quaesitam non esse tautochronam descensuum; aequatio enim

$$c\,dt = k\,dr\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right)$$

in illis formulis non continetur, quod periculum facienti statim patebit. Quamobrem si MA fuerit tautochrona descensuum et AN ascensuum, etiamsi omnes itus per MAN iisdem absolvantur temporibus, tamen reditus seu semioscillationes sequentes per NAM non erunt isochronae. Pendulum ergo, quod secundum curvas MA et AN oscillari efficitur, oscillationes non faciet isochronas, etiamsi alternae semioscillationes, in quibus descensus in curva MA incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec consequenter curva composita MAN non est idonea ad pendulorum motum in medio resistente aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium afferretur, si casus determinaretur, quo curva AN similis et aequalis curvae MA prodiret.

PROPOSITIO 88

PROBLEMA

799. *Si curvae MA et AN* (Fig. 87, p. 396) *eam habuerint proprietatem, ut omnes semioscillationes, quae in curva MA incipiunt, sint inter se isochronae in medio, quod in duplicata ratione celeritatum resistit, determinare casus, quibus hae duae curvae coniunctae MA et AN unam curvam continuam constituunt.*

SOLUTIO

Manentibus iisdem denominationibus, quas in praecedente propositione adhibuimus, scilicet $AP = x$, $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$ atque $f =$ longitudini penduli isochroni in vacuo et gravitate $= g$, invenimus ibi has duas aequationes

$$ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{k}}\,dt = e^{\frac{-s}{k}}\,dx,$$

quibus relatio inter utramque curvam continetur. Iam quia curvae MA et NA duo debent esse rami curvae continuae, aequatio inter x et s ita debet esse comparata, ut, si x abeat in t, tum s fiat $= -r$ propter situm negativum. Ad hoc accipiamus novam variabilem z, cuius s et x sint tales functiones, ut facto z negativo x abeat in t et s in $-r$. Sit

$$\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = z^2;$$

erit

$$ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f};$$

facto enim z negativo, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit

$$ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f};$$

quae aequatio cum priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z, quae non mutatur, etiam si loco z ponatur $-z$, et ponatur

$$ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P;$$

quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negativum; abibit $-s$ in r atque habebitur

$$ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P \quad \text{ac} \quad ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f},$$

uti requiritur. Alteri aequationi

$$\int e^{\frac{r}{k}}dt = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$$

per hanc

$$\int e^{\frac{-s}{k}}dx = z^2$$

iam satisfit; posito enim z negativo et dt loco dx atque r loco $-s$ prodit

$$\int e^{\frac{s}{k}}dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}}dx.$$

Ex variabili ergo z, cuius P est functio quaecunque par, curva quaesita AM, cuius continua est altera AN, ita determinatur, ut sit

$$e^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{P}{k} \quad \text{atque} \quad dx = 2e^{\frac{s}{k}}zdz = \frac{8k^2 zdz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}.$$

Erit ergo

$$x = 8k^2\int\frac{zdz}{(2P - z\sqrt{2f})^2} \quad \text{et} \quad s = 2kl\frac{2k}{2P - z\sqrt{2f}}.$$

Sit

$$z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$$

tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem commodius producendam, quia debebit esse u unius dimensionis; erit ergo P functio par ipsius u unius dimensionis quoque. Quare habebitur

$$s = 2kl\frac{k}{P - u} \quad \text{atque} \quad x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P - u)^2}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

800. Infinitae ergo curvae tautochronae MAN invenientur, si infiniti varii valores loco P, qui omnes sint functiones pares ipsius u, substituantur.

Aequatio vero inter x et s obtinebitur, si ex duabus aequationibus inventis

$$s = 2kl\frac{k}{P-u} \quad \text{atque} \quad x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$$

variabilis u, quae etiam in P inest, eliminetur.

COROLLARIUM 2

801. Quia est $s = 2kl\frac{k}{P-u}$, erit

$$ds = \frac{2k(du-dP)}{P-u}$$

et

$$e^{\frac{s}{2k}} = \frac{k}{P-u} \quad \text{seu} \quad P-u = ke^{\frac{-s}{2k}}$$

atque

$$e^{\frac{s}{2k}}ds = \frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}.$$

Cum qua aequatione si altera

$$dx = \frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$$

coniungatur, prodibit

$$\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(du-dP)}{2udu}.$$

Quae aequatio ad eliminandum u est saepe commodissima.

SCHOLION 1

802. Quia evanescente s quoque x evanescere debet, primum investigandum est, quo ipsi u dato valore s evanescat. Deinde integrale

$$\int\frac{udu}{(P-u)^2}$$

ita accipi debet, ut evanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque observandum est cum in constructione curvae, quae ope duarum inventarum aequationum perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s, si

quidem ea ex aequatione integrata

$$x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{u\,du}{(P-u)^2}$$

deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multipla adhibeantur, loco duarum inventarum aequationum adhiberi possunt istae

$$s = 2kl\frac{c}{P-u} \quad \text{et} \quad x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{u\,du}{(P-u)^2},$$

ubi constans c est arbitraria et idcirco ita determinari potest, ut s eodem casu evanescat, quo evanescit x. At s evanescit, si $u = 0$, quia est

$$\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{2u^2}{f}$$

atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ evanescit evanescente s; quare c aequale esse debet valori ipsius P, si in eo ponatur $u = 0$. Eodem ergo casu x debet evanescere, ex quo constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel etiam loco P talis functio par ipsius u accipi debet, quae fiat $= c$, si ponatur $u = 0$.

COROLLARIUM 3

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et gravitate $= g$ sit $= f$ atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent ab oscillationibus in vacuo, erit radius osculi curvae in $A = f$, si quidem tangens curvae in A fuerit horizontalis.

EXEMPLUM 1

804. Quia P esse debet functio par ipsius u, sit P constans $= c = k$, quo posito $u = 0$ fiat $s = 0$. Erit ergo

$$k - u = ke^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{seu} \quad u = k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Atque ob $dP = 0$ habebitur

$$\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f}{2u} \quad \text{seu} \quad u = \frac{fe^{\frac{-s}{2k}}dx}{2ds}.$$

Ex quibus aequationibus conficitur ista

$$\frac{f\,dx}{2} = k\,ds\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

Quae aequatio est pro ipsa tautochrona descensuum; quae ultra A continuata dat tautochronam ascensuum; atque omnes semioscillationes super hac curva continua, si modo in ramo MA incipiant, erunt isochronae.

EXEMPLUM 2

805. Sit

$$P = k + \frac{u^2}{a};$$

retinebit P eundem valorem facto u negativo. Hoc posito erit

$$k - u + \frac{u^2}{a} = k e^{\frac{-s}{2k}}$$

et propter $dP = \frac{2u\,du}{a}$ erit

$$\frac{e^{\frac{s}{2k}}\,ds}{dx} = \frac{f(a-2u)}{2au};$$

ex qua aequatione prodit

$$u = \frac{fa\,dx}{2\left(a e^{\frac{s}{2k}}\,ds + f\,dx\right)}.$$

Qui ipsius u valor in altera aequatione substitutus dat

$$2fa^2 e^{\frac{s}{k}}\,dx\,ds = 4k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)\left(a e^{\frac{s}{2k}}\,ds + f\,dx\right)^2 - f^2 a e^{\frac{s}{2k}}\,dx^2$$

atque extracta radice

$$\frac{a e^{\frac{s}{2k}}\,ds}{f\,dx} = \frac{a e^{\frac{s}{2k}}}{4k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)} - 1 \pm \sqrt{\frac{a e^{\frac{s}{2k}}}{4k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)}\left(\frac{a e^{\frac{s}{2k}}}{4k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)} - 1\right)}.$$

In casu speciali, si fuerit $a = 4k$, ista aequatio abit in hanc

$$\frac{4k e^{\frac{s}{2k}}\,ds}{f\,dx} = \frac{1 \pm e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1},$$

quae duas aequationes in se complectitur, quarum altera est

$$f\,dx = 4k e^{\frac{s}{2k}}\,ds\left(e^{\frac{s}{4k}} - 1\right)$$

et altera

$$-f\,dx = 4k e^{\frac{s}{2k}}\,ds\left(e^{\frac{s}{4k}} + 1\right).$$

Harum autem posterior, quia posito $s=0$ non evanescit dx et ob valorem ipsius dx negativum, est inutilis. Prior vero integrata dat

$$fx = 16k^3\left(\frac{e^{\frac{3s}{4\lambda}}}{3} - \frac{e^{\frac{s}{2\lambda}}}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

seu

$$3fx = 8k^3\left(2e^{\frac{3s}{4\lambda}} - 3e^{\frac{s}{2\lambda}} + 1\right).$$

Quae ultra A continuata hac aequatione exprimitur

$$3ft = 8k^3\left(2e^{\frac{-3r}{4\lambda}} - 3e^{\frac{-r}{2\lambda}} + 1\right).$$

Per seriem vero habetur ista aequatio

$$fx = \frac{s^2}{2} + \frac{5s^3}{24k} + \frac{19s^4}{384k^2} + \text{etc.}$$

et pro altera curvae parte AN haec

$$ft = \frac{r^2}{2} - \frac{5r^3}{24k} + \frac{19r^4}{384k^2} - \text{etc.}$$

COROLLARIUM 4

806. Quia est

$$z^2 = \frac{2u^2}{f} = \int e^{\frac{-s}{\lambda}}dx,$$

erit

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}f\int e^{\frac{-s}{\lambda}}dx}.$$

Eliminato vero u est

$$P = ke^{\frac{-s}{2\lambda}} + \sqrt{\frac{1}{2}f\int e^{\frac{-s}{\lambda}}dx}.$$

Quare si ille valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit statim aequatio inter s et x.

EXEMPLUM 3

807. Ponamus esse

$$P = \sqrt{(k^2+u^2)} \quad \text{seu} \quad P^2 = k^2 + u^2;$$

substitutis loco P et u^2 valoribus supra datis erit

$$k^2 e^{\frac{-s}{k}} + k e^{\frac{-s}{2k}} \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = k^2 \quad \text{seu} \quad \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = k\left(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Hinc quadratis sumendis oritur

$$2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx = k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2 = k^2\left(e^{\frac{s}{k}} + e^{\frac{-s}{k}} - 2\right).$$

Haec vero aequatio differentiata dat hanc

$$2fe^{\frac{-s}{k}} dx = k ds\left(e^{\frac{s}{k}} - e^{\frac{-s}{k}}\right) \quad \text{seu} \quad 2f dx = k ds\left(e^{\frac{2s}{k}} - 1\right),$$

cuius integralis est

$$2fx = \frac{k^2 e^{\frac{2s}{k}}}{2} - ks - \frac{k^2}{2}.$$

Quae aequatio in seriem conversa dat

$$fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3k} + \frac{s^4}{6k^2} + \frac{s^5}{15k^3} + \frac{s^6}{45k^4} + \text{etc.}$$

SCHOLION 2

808. Quas in his exemplis invenimus curvas tautochronas pro medio, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, eae ita sunt comparatae, ut arcus MA et AN sint dissimiles. Cum igitur omnes descensus super curva MA incipere debeant, sequentes semioscillationes, quae in curva NA incipiunt, non erunt tautochronae, id quod in causa est, quod hae curvae ad motum oscillatorium accommodari nequeant. Huic autem incommodo remedium afferretur, si huiusmodi curvarum MA et NA par inveniretur, quae essent inter se similes et aequales; hoc enim casu perinde super utraque curva descensus fieri posset. Dubium quoque nullum est, quin talis casus existat, eiusque inventio, quia hae duae curvae forte non erunt continuae, ad praecedentem propositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curva descensuum, cui respondens curva ascensuum similis et aequalis sit; haec vero investigatio ob defectum analyseos ita est difficilis, ut dubitem, num quisquam ante insignem analyseos promotionem ad hunc scopum pertingere

possit. Haec vero quaestio huc reducitur, ut investigetur aequatio inter s et x huius conditionis, ut, si in ea ponatur

$$-2kl\left(e^{\frac{s}{2k}}-\frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{x}{k}}dx\right)$$

loco s et

$$\int\frac{dx}{\left(1-\frac{1}{k}e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{s}{k}}dx\right)^2}$$

loco x, eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante [§ 788]. Conditio quidem haec multis modis facilior effici potest; attamen quomodo ei satisfieri possit, non video. Si medium fuerit rarissimum, non difficile est ex allatis casum invenire, quo duae curvae MA et AN sint inter se similes et aequales. Ego quidem ad finem perducto calculo hanc inveni aequationem

$$fdx=sds+\frac{s^3ds}{9k^2}\quad\text{seu}\quad fx=\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{36k^2};$$

quae curva simul ultra A continuata ramum habet AN similem et aequalem arcui AM; quare pendulum in hac curva oscillans singulas semioscillationes absolvet aequalibus temporibus. Erit autem

$$s^2=-9k^2+3k\sqrt{(9k^2+4fx)}\quad\text{et}\quad s=\sqrt{\left(-9k^2+3k\sqrt{(9k^2+4fx)}\right)}.$$

Quia vero k est quantitas valde magna, erit

$$s=\sqrt{2fx}-\frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2}\quad\text{atque}\quad ds=\frac{fdx}{\sqrt{2fx}}-\frac{fdx\sqrt{2fx}}{12k^2}.$$

Hincque fit

$$dy=dx\sqrt{\frac{f-2x}{2x}}-\frac{f^2dx}{12k^2}\sqrt{\frac{2x}{f-2x}}.$$

Ponatur $f=2a$; erit

$$y=\int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}-\int\frac{a^2dx}{3k^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}}=\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}-\int\frac{a^2xdx}{3k^2\sqrt{(ax-xx)}}$$

$$=\left(1+\frac{a^2}{3k^2}\right)\sqrt{(ax-xx)}+\left(1-\frac{a^2}{3k^2}\right)\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}.$$

Quae ergo curva eodem fere modo quo cyclois describi potest ope rectificationis circuli.

COROLLARIUM 5

809. Si sumatur $a = k\sqrt{3}$ seu $f = 2k\sqrt{3}$, curva haec abit in ellipsin, cuius axis horizontalis est duplo maior quam verticalis, qui est $= k\sqrt{3}$. Fieri ergo potest, ut ellipsis sit tautochrona in fluido rarissimo atque magis satisfaciat quam cyclois.

SCHOLION 3

810. Constructio autem curvae tautochronae in medio rarissimo in praecedente scholio datae est, ut sequitur: Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ (Fig. 88) describatur semicirculus AOB et ex hoc super basi BD cyclois AFD; quae eadem inverso situ describatur AGD. Quibus factis curva quaesita AMC construetur sumendis ubique eius applicatis

$$PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG;$$

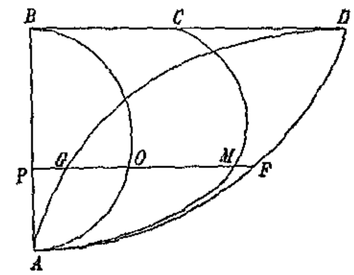


Fig. 88.

qua ratione curvae infinita puncta cognoscuntur. Vel etiam accipi potest

$$PM = \left(1 + \frac{a^2}{3k^2}\right)PO + \left(1 - \frac{a^2}{3k^2}\right)AO,$$

ita ut cycloide non sit opus. Curva autem haec alicubi habebit tangentem verticalem seu applicatam PM maximam, quae invenitur posito $dy = 0$. Prodibit autem

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2} \quad \text{seu} \quad x = \frac{3ak^2}{a^2 + 3k^2};$$

cui valori si AP aequalis capiatur, invenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89

PROBLEMA

811. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis g data curva quacunque am* (Fig. 89, p. 412) *pro descensibus in vacuo invenire curvam AM pro descensibus in medio resistente uniformi in duplicata ratione celeritatum huius indolis, ut omnes descensus super MA sint isochroni respective omnibus descensibus super ma, si celeritates in punctis imis a et A fuerint aequales.*

SOLUTIO

Sit pro curva descensuum in vacuo am abscissa $ap = t$, arcus $am = r$; pro curva vero descensuum in medio resistente sit $AP = x$ et $AM = s$; resistentiae vero exponens ponatur $= k$. Iam considerentur bini descensus super his curvis, in quibus celeritates in A et a acquisitae sint aequales et debitae altitudini b. Erit ergo tempus descensus in vacuo

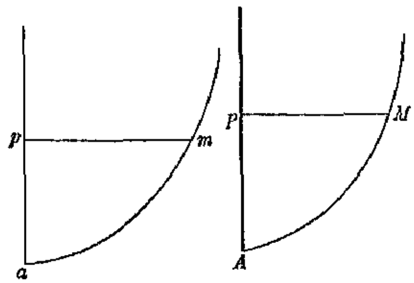


Fig. 89.

$$= \int \frac{dr}{\sqrt{(b - gt)}},$$

si post integrationem ponatur $gt = b$. At pro tempore descensus in medio resistente super curva MA habebitur

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\left(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx\right)}},$$

si item post integrationem ponatur

$$g \int e^{\frac{-s}{k}} dx = b.$$

Quamobrem haec tempora erunt aequalia, si fuerit

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr \quad \text{et} \quad \int e^{\frac{-s}{k}} dx = t;$$

his enim positis pro utroque tempore habebitur eadem expressio

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(b - gt)}}.$$

Cum igitur sit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$, erit integrando

$$2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) = r \quad \text{atque} \quad e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{2k - r}{2k};$$

unde prodit

$$s = 2kl \frac{2k}{2k - r}.$$

Altera vero aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$ dat

$$e^{\frac{-s}{k}} dx = dt.$$

Est autem

$$e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2},$$

quo valore substituto habetur

$$dx = \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2},$$

ex quo oritur

$$x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}.$$

Data ergo aequatione inter t et r pro curva am ope duarum harum aequationum, quibus s et x per t et r determinantur, construi poterit curva quaesita AM. Aequatio vero inter x et s commodius invenietur ex data aequatione inter t et r, si in ea loco r substituatur $2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ loco t. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

812. Circa punctum infimum a, ubi t et r sunt quantitates evanescentes, fit

$$s = r + \frac{r^2}{4k} \quad \text{et} \quad x = t + \int \frac{r\,dt}{k}$$

seu

$$ds = dr + \frac{r\,dr}{2k} \quad \text{et} \quad dx = dt + \frac{r\,dt}{k}.$$

Quare inclinatio curvae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curvae ma in a.

COROLLARIUM 2

813. Porro radius osculi in puncto infimo a, si tangens fuerit horizontalis, est $= \frac{r\,dr}{dt}$ et in A, quia tangens quoque erit horizontalis,

$$= \frac{s\,ds}{dx} = \frac{r\,dr + \frac{3r^2 dr}{4k}}{dt + \frac{r\,dt}{k}}.$$

Erit ergo

$$\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt}\left(1 - \frac{r}{4k}\right).$$

Quare ob r infinite parvum erit

$$\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}.$$

COROLLARIUM 3

814. Si ergo curva ma in a habuerit tangentem horizontalem, erit curvae MA tangens in A quoque horizontalis atque radius osculi in A aequalis erit radio osculi in a.

COROLLARIUM 4

815. Si igitur in vacuo inventa fuerit curva ma, in qua tempora descensuum quamcunque habeant relationem ad coleritates in a acquisitas, idem problema pro medio resistente solvetur curva MA, quae praescripta ratione ex curva ma construitur.

COROLLARIUM 5

816. Si igitur curva ma fuerit cyclois seu tautochrona in vacuo, AM erit tautochrona descensuum in medio resistente supra inventa. Posito enim $r^2 = 2at$ seu $rdr = adt$ prodibit substitutis loco r et t inventis valoribus ista aequatio

$$2ke^{\frac{-s}{2k}}ds\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) = ae^{\frac{-s}{k}}dx \quad \text{seu} \quad adx = 2kds\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

EXEMPLUM

817. Sit am linea recta utcunque inclinata, ita ut sit $r = nt$; erit tempus descensus, quo celeritas altitudini b debita generatur,

$$= \int \frac{ndt}{\sqrt{(b - gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}.$$

Eandem ergo habebit proprietatem curva MA, ut tempus cuiusque descensus in medio resistente, quo celeritas $\sqrt{b}$ generatur, sit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ seu proportionale

ipsi celeritati genitae. Cum autem sit $r = nt$, erit $dr = ndt$; in qua si loco dr et dt valores inventi substituantur, prodibit

$$e^{\frac{-s}{2k}}ds = ne^{\frac{-s}{k}}dx \quad \text{seu} \quad ndx = e^{\frac{s}{2k}}ds;$$

quae est aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraesentatur in fig. 86, p. 381, nempe curva CA, quae in A eam habet inclinationem quam recta data ma.

SCHOLION 1

818. Quemadmodum hic curva MA est determinata, super qua omnes descensus in medio resistente iisdem absolvuntur temporibus quibus descensus in vacuo super curva ma, si celeritates ultimae in A et a fuerint aequales, ita eodem modo curva MA potest definiri, super qua omnes ascensus in medio resistente iisdem temporibus absolvuntur quibus similes iisdem celeritatibus incipientes ascensus in vacuo super curva am. Nam cum in medio resistente descensus in ascensum mutetur facto k negativo, si ponantur $AP = x$ et $AM = s$, habebitur

$$x = \int \frac{4k^2dt}{(2k+r)^2} \quad \text{et} \quad s = 2kl\frac{2k+r}{2k}$$

seu inverse

$$t = \int e^{\frac{s}{k}}dx \quad \text{et} \quad r = 2k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

Ex quibus tum facile curva AM potest construi et aequatio pro ea inveniri.

SCHOLION 2

819. In hoc problemate ex curva descensuum in vacuo data determinavimus curvam descensuum in medio resistente. Facile autem apparet vicissim ex data curva AM pro medio resistente alteram am pro vacuo inveniri posse. Cum enim sit

$$r = 2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad t = \int e^{\frac{-s}{k}}dx,$$

constructio curvae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio vero pro curva am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s reperitur, si in ea loco x substituatur $\int\frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$ et $2kl\frac{2k}{2k-r}$ loco s. Quod hic praeterea de descensibus dictum est, idem de ascensibus valet, si modo k ponatur negativum, uti in scholio 1 monuimus.

SCHOLION 3

820. Tradita hic inventio alterius curvae duarum am et AM ex altera etiam locum habet, si datae curvae non habeatur aequatio, sed si manu utcunque fuerit ducta; ex formulis enim inventis constructio potest deduci, quae ab aequatione non amplius pendeat. Quamobrem cum in capite praecedente (§ 432) in casum inciderimus pro vacuo, quo curvam cm (Fig. 90) invenimus cum data ac iungendam, ut omnes descensus ex quovis puncto curvae cm usque ad a aequalibus absolvantur temporibus, similia exempla ex iis pro medio resistente erui poterunt, quibus linea ex partibus duarum diversarum curvarum composita sit tautochrona. Si enim curva acm fuerit huiusmodi curva tautochrona pro vacuo, ex ea per solutionem huius problematis similis curva composita pro medio resistente invenietur. Scilicet ex ac methodo tradita curva AC definiatur; qua inventa posito $bp = t$, $cm = r$ et $BP = x$ atque $CM = s$ et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et $AB = A$ et $AC = C$, tum enim, cum data sit aequatio inter t et r, erit

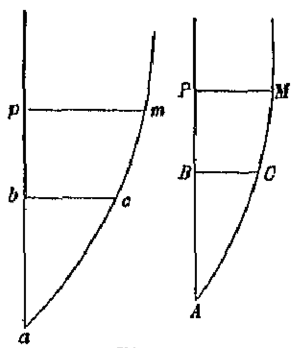


Fig. 90.

$$AP = A + x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k - c - r)^2}$$

et

$$AM = C + s = 2kl \frac{2k}{2k - c - r}.$$

At si pro medio resistente data fuerit curva AC atque requiratur altera CM eius proprietatis, ut omnes descensus super MCA aequalibus absolvantur temporibus, solutio non dissimili modo efficietur. Nam ex data curva AC pro medio resistente inveniatur curva eiusdem proprietatis pro vacuo ac per scholion 2. Qua inventa quaeratur curva cm ei adiungenda, quae omnes descensus in vacuo isochronos producat (§ 432). Denique methodo modo tradita ex curva composita acm pro vacuo quaeratur similis curva composita pro medio resistente ACM, cuius quidem pars AC iam est cognita; quippe ex ea lineam ac definivimus. Idem ergo problema, quod in vacuo tantum in se habebat difficultatis, in medio quoque resistente resolvitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem benevolum rogo, ut, antequam ad caput sequens progrediatur, quae in capite I ab § 58 usque ad finem capitis tradita sunt, repetere velit.

CAPUT QUARTUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE

PROPOSITIO 90

PROBLEMA

821. *Data via in superficie quacunque* $Mm\mu$ (Fig. 91) *invenire eius positionem respectu plani dati* APQ *et radii osculi illius viae in* M *tam positionem quam longitudinem nec non normalis in superficiem situm.*

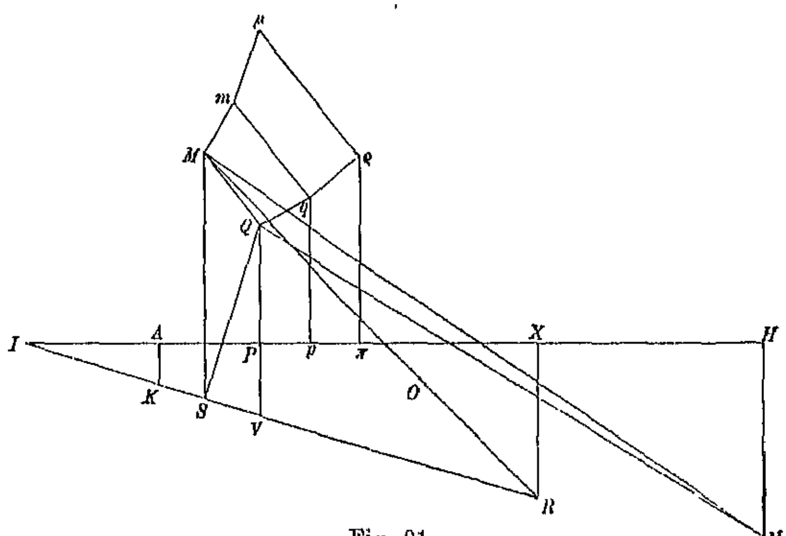


Fig. 91.

SOLUTIO

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum respectu positio curvae $Mm\mu$ sit determinanda, ex tribus punctis proximis M, m et μ

datae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, mq, $\mu\varrho$ atque ex punctis Q, q, ϱ ad axem AP perpendicula QP, qp et $\varrho\pi$. Posito nunc initio abscissarum in A sit $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$. Quia porro superficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variabiles x, y et z; quae aequatio sit haec

$$dz = Pdx + Qdy.$$

Cum hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in ista superficie existens; quare, cum linea $Mm\mu$ data ponatur, dabitur praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curva $Mm\mu$ determinatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint elementa abscissae Pp, $p\pi = dx$ inter se aequalia seu sumatur elementum dx constans. Erit ergo

$$pq = y + dy, \quad \pi\varrho = y + 2dy + ddy$$

atque

$$qm = z + dz \quad \text{et} \quad \varrho\mu = z + 2dz + ddz.$$

His positis sit MN normalis in superficiem in puncto M et N punctum, quo haec normalis plano APQ occurrit; demittatur ex N in axem perpendiculum NH; erit

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y$$

(§ 68). Sit nunc MR positio radii osculi curvae $Mm\mu$ et R incidentia eius in planum APQ; erit ex R in axem demisso perpendiculo RX

$$AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$$

atque

$$XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$$

(§ 68). Longitudo vero radii osculi, scilicet MO,

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}$$

(§ 72). Denique concipiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm, $m\mu$, productum, donec planum APQ intersecet, sitque intersectio recta RKI, cui

ex A erecta perpendicularis in K occurrat et ex P in V; inventum est supra esse

$$PV = \frac{zddy}{ddz} - y$$

(§ 68). Cum nunc sit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit

$$PI = \frac{(AX - AP)PV}{XR - PV}.$$

Est vero

$$AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$$

atque

$$XR - PV = \frac{zddyddz(dz^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}.$$

Quibus substitutis erit

$$PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dz^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)} = \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$$

atque

$$AI = PI - AP = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzddy - dyddz}.$$

Hinc reperitur

$$AK = \frac{PV \cdot AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}.$$

Plani vero, in quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ invenietur demittenda ex Q perpendiculari QS ad intersectionem RI; erit enim tangens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum sit $IV : PI = QV : QS$, erit illa tangens

$$= \frac{QM \cdot IV}{PI \cdot QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}.$$

Anguli vero NMR, quem radius osculi cum normali in superficiem constituit, tangens est

$$= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

(§ 71). Ex his igitur omnia deduci possunt, quae ad positionem curvae $Mm\mu$ cognoscendam requiruntur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

822. Curvae $Mm\mu$ proiectio in plano APQ est curva $Qq\varrho$, cuius natura exprimitur aequatione inter x et y. Quare ista proiectio habebitur, si ope aequationum $dz = Pdx + Qdy$ et eius, qua ipsa curva in superficie ducta determinatur, nova formetur aequatio eliminanda variabili z, quae sit inter x et y tantum.

COROLLARIUM 2

823. Simili modo, si eliminetur x, ut prodeat aequatio inter y et z, hac aequatione definietur proiectio curvae $Mm\mu$ in plano, quod est normale ad axem AX. Atque aequatio, in qua non inest y, sed tantum x et z, dabit proiectionem curvae $Mm\mu$ in plano, quod normaliter planum APQ secundum axem AX intersecat.

COROLLARIUM 3

824. Curvae autem $Mm\mu$ natura ex duabus eius proiectionibus in duobus planis invicem normalibus distincte cognoscitur. Qualem cognitionem quoque suppeditat unica proiectio una cum ipsa superficie.

COROLLARIUM 4

825. Quamobrem ad curvam in superficie data quamcunque characteribus designandam requiritur, ut praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$, qua superficies determinatur, detur aequatio duas tantum variabiles involvens pro proiectione quapiam curvae $Mm\mu$.

COROLLARIUM 5

826. Si superficies secetur plano, simili modo, quo conus ad sectiones conicas producendas secari solet, curva ex hac sectione orta erit in eodem plano. Quare his casibus tam positio rectae IR erit constans quam plani IMR inclinatio ad planum APQ.

EXEMPLUM

827. Si igitur detur superficies quaecunque eaque secetur plano IMR, quaeratur curva hac sectione orta. Ad hoc ponatur $AI = a$, $AK = b$ et

anguli inclinationis plani IMR ad planum APQ tangens $= m$; eritque

$$a = \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz} - x \quad \text{et} \quad b = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$$

atque

$$m = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}.$$

Ex quibus aequationibus coniunctis cum $dz = Pdx + Qdy$ natura curvae hac sectione genitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus oritur

$$\frac{b}{a} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz} \quad \text{seu} \quad ddz : ddy = adz : bdx + ady;$$

cuius aequationis integralis est

$$\frac{1}{a} ldz = \frac{1}{a} l(bdx + ady) - \frac{1}{a} lc \quad \text{seu} \quad cdz = bdx + ady$$

et porro

$$cz = bx + ay + ff.$$

In prima vero aequatione si loco ddz et ddy eorum proportionalia substituantur, prodibit

$$a + x = \frac{bzdx + azdy - aydz}{bdz} \quad \text{seu} \quad abdz + bxdz = bzdx + azdy - aydz,$$

cuius per zz divisae integralis est haec

$$c - \frac{ab}{z} = \frac{bx + ay}{z} \quad \text{seu} \quad cz = bx + ay + ab;$$

quod ergo ante erat ff, hic est ab, seu $ff = ab$. Constantem vero c tertia aequatio definiet; erit autem

$$m = \frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{bdx + ady} \quad \text{seu} \quad \frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = ady + bdx.$$

Quare erit superior littera

$$c = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m}$$

atque praeter aequationem superficiei naturam exprimentem habetur ista

$$\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=bx+ay+ab,$$

ex quibus natura quaesitae curvae est derivanda. Quia autem tota curva quaesita est in plano IMR, commodissime ea exprimetur aequatione inter coordinatas orthogonales in eodem plano sumtas. Sumto ergo IR pro axe ex M in eum demittatur perpendiculum MS et vocetur $IS=t$ et $MS=u$. Est vero $IA:AK=IP:PV$ seu

$$PV=\frac{ab+bx}{a}$$

et

$$QV=\frac{ab+bx+ay}{a}=\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma}.$$

Porro est

$$\sqrt{(a^2+b^2)}:a=\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma}:QS;$$

quare erit

$$QS=\frac{z}{m}\quad\text{et}\quad SV=\frac{bz}{ma}.$$

Ex his prodibit

$$MS=u=\frac{z\sqrt{(1+m^2)}}{m}\quad\text{atque}\quad IS=t=\frac{m(a+x)\sqrt{(a^2+b^2)}-bz}{ma}.$$

Ex quo oritur

$$z=\frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}\quad\text{et}\quad x=\frac{bu+at\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)(1+m^2)}}-a$$

et substitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=bx+ay+ab$ prodibit

$$y=\frac{au-bt\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(1+m^2)(a^2+b^2)}}.$$

His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione superficiei substitutis proveniet aequatio inter t et u seu coordinatas orthogonales curvae quaesitae.

COROLLARIUM 6

828. Si intersectio plani secantis IR in ipsum axem AX incidat sumaturque I in A, erit

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}, \quad y = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} \quad \text{et} \quad x = t.$$

COROLLARIUM 7

829. Si intersectio IR plani secantis IMR cum plano APQ fuerit normalis ad axem AX, erit $b = \infty$. Quare prodibunt

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}, \quad x = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} - a \quad \text{et} \quad y = -t.$$

COROLLARIUM 8

830. Cum valores loco z, y et x substituendi sint unius dimensionis ipsarum t et u, perspicuum est aequationem inter t et u non plures habere posse dimensiones quam ipsam aequationem inter z, y et x.

COROLLARIUM 9

831. Quare si aequatio inter z, y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi praeter conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano factae erunt sectiones conicae.

SCHOLION

832. In Comment. Tom. III. ea dissertatione, in qua lineam brevissimam in superficie quacunque determinavi, tria praecipue superficierum genera sum persecutus, quae erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda.[1])

Aequatio vero generalis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas, si P evanescit et Q tantum ab y et z pendeat, ita ut aequationem pro hoc super-

---

1) L. Euleri Commentatio 9 (indicis Enestroemiani): *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, Comment. acad. sc. Petrop. 3 (1728), 1732, p. 110; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 25. P. St.

ficierum genere abscissa x non ingrediatur; omnes enim sectiones inter se parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio

$$dz = Qdy.$$

Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies, quae generantur ducendis rectis ex singulis curvae cuiuspiam punctis ad punctum fixum extra planum eius curvae situm. Quae superficies hanc habent proprietatem, ut omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latera homologa ut distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficiebus, si quidem vertex coni fuerit in A, ita sunt comparatae, ut x, y et z coniunctim ubique eundem dimensionum numerum constituant.

Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae generantur conversione cuiuscunque curvae circa axem; qui axis si fuerit AX, posito x constante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare aequatio pro iis hanc habebit formam

$$dz = Pdx - \frac{ydy}{z} \quad \text{seu} \quad zdz + ydy = zPdx,$$

ubi Pz ab x tantum pendet; seu est

$$Q = -\frac{y}{z} \quad \text{et} \quad P = \frac{X}{z}$$

existente X functione ipsius x.

Quemadmodum autem in his superficiebus tornatis omnes sectiones axi normales sunt circuli, ita tales superficies concipi possunt, quarum sectiones axi normales sint curvae quaecunque similes. Tales superficies omnes hac continebuntur proprietate generali, ut functio quaecunque ipsius x aequalis sit functioni eiusdem ubique dimensionum ipsarum y et z numeri. Ut si iste dimensionum numerus fuerit n, aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ pro ea haec erit proprietas, ut sit

$$Rz + Qy = n\int Pdx \quad \text{vel} \quad Rdz + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}.\text{[1]}$$

Ex quo, an data aequatio sit ad huiusmodi superficiem, statim concludi potest.

---

1) Vide notam p. 44. P. St.

PROPOSITIO 91

PROBLEMA

833. *In superficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea motum et a nullis potentiis sollicitatum describit tam in vacuo quam in medio quocunque resistente.*

SOLUTIO

Quia corpus a nullis potentiis absolutis sollicitari ponitur, linea ab eo in superficie descripta erit linea brevissima in vacuo (§ 62). Medii autem resistentis vis celeritatem corporis tantum imminuit neque directionem ullo modo afficit; quare etiam in medio resistente via a corpore in quavis superficie descripta erit pariter brevissima. Manentibus igitur ut ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ (Fig. 91, p. 417) sit $dz = Pdx + Qdy$ aequatio superficiei naturam exprimens atque Mm, $m\mu$ duo lineae brevissimae cuiuspiam elementa. Ex his supra pro linea brevissima inventa est haec aequatio

$$Pdzddy + dxddy = Pdyddz - Qdxddz$$

(§ 69), unde oritur

$$ddz = \frac{(Pdz + dx)ddy}{Pdy - Qdx}.$$

At aequatio ad superficiem differentiata dat

$$ddz = dPdx + Qddy + dQdy,$$

ex quibus coniunctis fit

$$ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} \quad \text{et} \quad ddz = \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}.$$

Dato ergo elemento Mm sequens $m\mu$ in linea brevissima invenietur; erit enim

$$\pi\varrho = PQ + 2dy + ddy \quad \text{et} \quad \varrho\mu = QM + 2dz + ddz$$

et ipsarum ddy et ddz valores sunt inventi. Quare hinc sequentis cuiusque elementi positio determinatur atque ipsius lineae brevissimae natura per quamcunque eius proiectionem cognoscitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

834. Si in aequatione pro superficie P et Q tantum per x et y dantur, aequatio

$$ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

proiectionem lineae brevissimae in plano APQ denotat.

COROLLARIUM 2

835. Pro linea ergo brevissima $Mm\mu$ sumtis elementis axis aequalibus erit

$$\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

atque

$$\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)},$$

ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et m cognoscitur.

COROLLARIUM 3

836. Quia pro linea brevissima angulus RMN evanescit (§ 71), incidet R in N; positio ergo radii osculi ita se habebit, ut sit $AX = x + Pz$ et $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii osculi erit [§ 73]

$$= -\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy}.$$

COROLLARIUM 4

837. Planum vero IMR, in quo sita sunt elementa lineae brevissimae $Mm\mu$, ita determinabitur, ut sit

$$AI = -x + \frac{y(dx + Pdz) - z(Pdy - Qdx)}{Qdz + dy}$$

et

$$AK = -y + \frac{z(Pdy - Qdx) + x(dy + Qdz)}{dx + Pdz}.$$

Tangens vero anguli, quem planum IMR cum plano APQ constituit, erit

$$=\frac{\sqrt{((dx+Pdz)^2+(dy+Qdz)^2)}}{Pdy-Qdx}.$$

Huiusque anguli secans est

$$=\frac{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}{Pdy-Qdx}$$

seu cosinus

$$=\frac{Pdy-Qdx}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

EXEMPLUM 1

838. Sit superficies cylindrica quaecunque axem habens AP; exprimetur eius natura hac aequatione $dz=Qdy$ evanescente P in generali aequatione $dz=Pdx+Qdy$. Quare pro proiectione lineae brevissimae huius superficiei in plano APQ habebitur ob $P=0$ et $dP=0$ haec aequatio

$$ddy=\frac{-QdQdy}{1+Q^2}$$

seu

$$l\frac{\alpha dx}{dy}=l\sqrt{(1+Q^2)} \quad \text{et} \quad \alpha dx=dy\sqrt{(1+Q^2)},$$

si quidem Q tantum per y detur; at si Q per y et z detur, variabilis z est eliminanda ope aequationis $dz=Qdy$. Uti in cylindro circulari, in quo est $z^2+y^2=a^2$, erit

$$z=\sqrt{(a^2-y^2)} \quad \text{et} \quad Q=\frac{-y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}.$$

Quare erit

$$\alpha dx=\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}.$$

In genere autem $\int dy\sqrt{(1+Q^2)}$ exprimit arcum sectionis ad axem AP normalis; quare dicto hoc arcu $=s$ erit $\alpha x=s$. Ex quo intelligitur, si talis superficies in planum explicetur, fore lineam brevissimam rectam; uti constat.

EXEMPLUM 2

839. Sit superficies proposita conica quaecunque verticem habens in A; aequatio pro tali superficie ita poterit adaptari, ut z aequetur functioni unius dimensionis ipsarum x et y. Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$ litterae P et Q erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x et y. Hanc ob rem, uti iam alibi[1]) ostendi, erit

$$Px + Qy = 0 \quad \text{seu} \quad Q = \frac{-Px}{y};$$

unde fiet

$$dQ = \frac{Pxdy - Pydx - yxdP}{y^2} \quad \text{et} \quad Pdy - Qdx = \frac{P(ydy + xdx)}{y}$$

atque

$$dPdx + dQdy = \frac{y^2dPdx + Pxdy^2 - Pydxdy - yxdPdy}{y^2} = \frac{(ydx - xdy)(ydP - Pdy)}{y^2}$$

et tandem

$$1 + P^2 + Q^2 = \frac{y^2 + P^2y^2 + P^2x^2}{y^2}.$$

Quibus substitutis erit

$$ddy = \frac{P(ydy + xdx)(ydx - xdy)(ydP - Pdy)}{ydx(y^2 + P^2y^2 + P^2x^2)}.$$

Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia P est functio nullius dimensionis ipsarum x et y. Erit vero

$$dy = pdx + xdp$$

et

$$ddy = xddp + 2dxdp = -\frac{P(p^2xdx + px^2dp + xdx)(pxdP - Ppdx - Pxdp)x^2dp}{px^3dx(p^2 + P^2p^2 + P^2)}$$

$$= \frac{Pdp(p^2dx + pxdp + dx)(Ppdx + Pxdp - pxdP)}{pdx(p^2 + P^2 + P^2p^2)}.$$

Ex qua aequatione quidem proiectio difficulter cognoscitur. Quomodo autem linea brevissima in tali superficie sit determinanda, fusius docui in Comment. III. p. 120.[2]) Ceterum idem de linea brevissima est notandum quod ante, scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

1) Vide notam p. 44. P. St.

2) Vide notam p. 423. P. St.

SCHOLION

840. Simili modo in determinandis lineis brevissimis super aliis superficierum speciebus non hic immoror, quia in citato loco hanc materiam plenius exposui. Progredior ergo ad investigationem linearum, quae in superficie a corpore a quibuscunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse est, ut in effectus cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4

841. *Vim prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est normalis ad ipsam superficiem, in qua corpus movetur.*

COROLLARIUM

842. Haec vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout eius directio directioni radii osculi lineae brevissimae vel contraria est vel in eam incidit (§ 79).

DEFINITIO 5

843. *Vim deflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est in plano superficiem tangente et perpendicularis in viam a corpore descriptam.*

COROLLARIUM

844. Haec ergo vis corpus a linea brevissima, quam a nullis potentiis sollicitatum describeret, deflectit et vel cis vel ultra eam detrahit pro eius directione vel cis vel ultra tendente.

PROPOSITIO 92

PROBLEMA

845. *Determinare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque motum, quod praeterea a nullis potentiis sollicitatur.*

SOLUTIO

Quia haec vis premens est normalis in superficiem ideoque eius directio MN (Fig. 91, p. 417), ea neque celeritatem neque directionem motus afficiet,

sed tota in pressione superficiei consumetur; corpus igitur in eadem linea progredietur, in qua, si haec vis abesset, moveretur; quae autem est linea brevissima in propositione praecedente determinata. Movebitur ergo corpus in linea $Mm\mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem superficiei MN. Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea superficiem versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis premens $= M$; premetur ab ea superficies secundum MN vi $= M$. At si radius osculi MO in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi erit contraria eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ sit linea brevissima, est radius osculi [§ 73]

$$MO = -\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy};$$

per quem si dividatur dupla altitudo v celeritati in M debita, prodibit vis centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum MN premitur,

$$= + \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} + M.$$

Positio tandem huius vis prementis per superiora [§ 68] inventa est

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y,$$

demisso scilicet ex puncto N, in quo normalis MN plano APQ occurrit, ad axem perpendiculo NH. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

846. Cum neque altera vis normalis deflectens neque vis tangentialis neque vis resistentiae, si quae adest, pressionem in superficiem afficiant, perspicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea sollicitetur, pressionem semper tantam esse, quantam hic assignavimus.

COROLLARIUM 2

847. Quantumvis igitur via a corpore descripta a linea brevissima discrepet, tamen pressio in superficiem fit secundum normalem in superficiem seu secundum radium osculi lineae brevissimae, non vero secundum ipsius curvae descriptae radium osculi, cuius longitudo etiam ad pressionem non requiritur.

SCHOLION

848. Ob hanc causam eam radii osculi lineae brevissimae formulam adhibuimus, in qua differentialia secundi gradus non insunt, ne is pendeat a positione duorum elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipsa movetur. Sed iste radius osculi ex unico elemento Mm innotescere debet; si enim corpus propter vim deflectentem non lineam brevissimam describat, differentialia secundi gradus ddy et ddz non amplius in radium osculi lineae brevissimae ingredi debent.

PROPOSITIO 93

PROBLEMA

849. *Vis tangentialis, quae secundum tangentem MT* (Fig. 92) *corpus trahit, effectum in corpus in superficie quacunque motum determinare.*

SOLUTIO

Sit haec vis tangentialis $= T$ corpusque per elementum Mm progrediatur celeritate altitudini v debita; quia haec vis motum diminuit, erit

$$dv = -T \cdot Mm = -T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

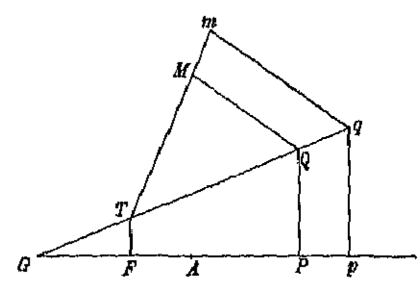


Fig. 92.

manentibus iisdem denominationibus, quibus ante sumus usi. Praeterea vero haec vis neque pressionem neque deviationem a linea brevissima afficit. Ad positionem vero directionis huius vis inveniendam producatur tangens MT, donec occurrat plano APQ in T; erit T punctum in elemento qQ producto. Fiat ergo

$$dz : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : QT$$

eritque

$$QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}.$$

Ex T demittatur in axem perpendiculum TF; erit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = QT : PF;$$

quare habetur

$$PF = \frac{z\,dx}{dz} \quad \text{et} \quad AF = \frac{z\,dx - x\,dz}{dz}.$$

Porro ob $dx : dy = \frac{z\,dx}{dz} : y - FT$ erit

$$FT = y - \frac{z\,dy}{dz},$$

ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

COROLLARIUM

850. Cum resistentia ad vim tangentialem sit referenda, ex his intelligitur, quomodo resistentiae effectus sit determinandus. Ut si fuerit resistentia $= R$, erit

$$dv = -(T + R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

PROPOSITIO 94

PROBLEMA

851. *Vis normalis deflectentis N effectum in corpus super superficie quacunque motum determinare.*

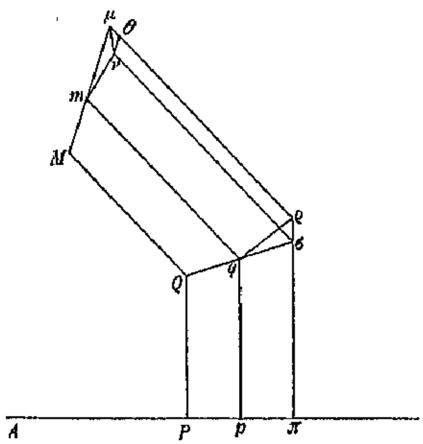


Fig. 93.

SOLUTIO

Positis ut ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ (Fig. 93) exprimatur superficiei natura hac aequatione

$$dz = P\,dx + Q\,dy$$

et moveatur corpus celeritate altitudini v debita per elementum Mm; quo percurso, nisi vis deflectens adesset, progrederetur per elementum $m\mu$ secundum lineam brevissimam foretque

$$\pi\varrho = y + 2\,dy + \frac{(P\,dy - Q\,dx)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

et

$$\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

(§ 835). Iam accedat vis normalis deflectens N, quae directionem habeat antrorsum. Haec ergo vis efficiet, ut corpus descripto elemento Mm non per $m\mu$ incedat, sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur pergere per $m\nu$; erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curvae a corpore descriptae. Quare demisso ex ν in planum APQ perpendiculo $\nu\sigma$ erit

$$\pi\sigma = y + 2dy + ddy \quad \text{et} \quad \sigma\nu = z + 2dz + ddz.$$

Hinc ergo habebitur

$$\sigma\varrho = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddy$$

et

$$\mu\varrho - \nu\sigma = \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddz.$$

Posito vero brevitatis ergo

$$\frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} = dd\eta \quad \text{et} \quad \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} = dd\zeta$$

invenietur radius osculi angulo elementari $\mu m\nu$ respondens [§ 72]

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{((dzdd\eta - dzddy - dydd\zeta + dyddz)^2 + dx^2(dd\eta - ddy)^2 + dx^2(dd\zeta - ddz)^2)}}.$$

Hic ergo si dicatur $= r$, erit $N = \frac{2v}{r}$ seu $2v = Nr$, quia hic angulus eodem modo generatur, quo corpus a vi normali in plano a linea recta deflectitur. Est vero

$$dzdd\eta - dydd\zeta = -\frac{(dy + Qdz)(dPdx + dQdy)}{1 + P^2 + Q^2}.$$

Atque loco $dd\eta$ et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dzddy - dyddz)^2 - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dPdx + dQdy)^2}{1 + P^2 + Q^2}\right)}}.$$

Cum autem per aequationem $dz = Pdx + Qdy$ sit

$$dPdx + dQdy = ddz - Qddy,$$

erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{-ddy(dx + Pdz) + ddz(Pdy - Qdx)}.$$

Hanc ob rem erit

$$ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}.$$

Q. E. I.

SCHOLION 1

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (§ 79) pro effectu huiusmodi vis determinando invenimus. Differentia enim tantum est in signo litterae N, quam vim ibi negative accipiendam esse apparet. Atque hic etiam de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata, quam hic extraximus, aeque potest esse negativa ac affirmativa. Hoc vero dubium, si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur, quia formula eiusmodi esse debet, ut punctum ν cis μ cadat, si potentia N antrorsum, ut posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radicis quadratae determinavi atque hanc ipsam formulam inveni.

COROLLARIUM 1

853. Si vis deflectens N evanescat, corpus motum suum in linea brevissima continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posito enim $N = 0$ habebitur

$$ddy(dx + Pdz) = ddz(Pdy - Qdx),$$

quae aequatio est pro linea brevissima.

COROLLARIUM 2

854. Quaecunque ergo vis premens et vis tangentialis atque resistentia corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis deflectens, corpus semper in linea brevissima movebitur.

SCHOLION 2

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, ea ex hoc deducetur, quod ea posita sit in plano tangente superficiem atque simul

sit normalis curvae descriptae; sit ergo MG (Fig. 94) eius directio et G punctum, in quo plano APQ occurrit, ita ut vis N secundum MG trahere censenda sit, dum eam ante antrorsum urgere posuimus. Primo ergo determinari debet intersectio plani superficiem in M tangentis cum plano APQ, quae sit recta TVG; haec vero inveniatur, si duae tangentes superficiem ad planum APQ usque producantur atque puncta, in quibus in planum APQ incidunt, linea recta iungantur. Sit ergo MT tangens lineae descriptae, quae propterea superficiem quoque tanget; erit, ut iam invenimus,

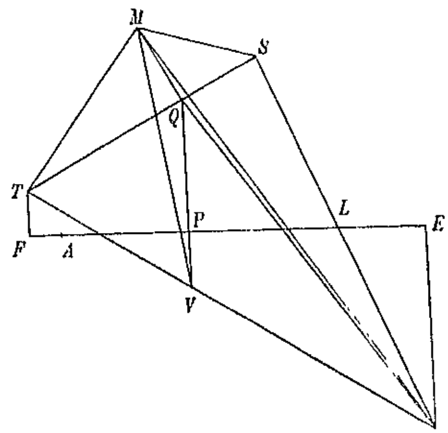


Fig. 94.

$$AF = \frac{z\,dx}{dz} - x \quad \text{et} \quad FT = y - \frac{z\,dy}{dz}$$

(§ 849). Porro superficies secta intelligatur plano PQM sitque MV sectionis huius tangens; erit

$$QV = \frac{z}{Q}$$

ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ posito $dx = 0$. Innotescit ergo punctum V, quocirca recta TV producta erit intersectio plani tangentis superficiem in M cum plano APQ. Punctum ergo G, in quo recta MG plano APQ occurrit, positum erit in recta TV. Porro in recta TQ sumatur

$$QS = \frac{z\,dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

eritque MS normalis in elementum Mm descriptum. Atque si ad QS ducatur normalis SG, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in elementum Mm perpendiculares. Quare cum MG sit quoque normalis in elementum descriptum, punctum G quoque positum erit in recta SG. Punctum ergo G erit in intersectione rectarum TV et SG. Est vero

$$PL = \frac{y\,dy + z\,dz}{dx}$$

et ang. $ELG =$ ang. PQT. Ponatur $GE = t$; erit

$$LE = \frac{tdy}{dx} \quad \text{et} \quad PE = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx}.$$

Deinde etiam propter triangula similia est $FP : FT + PV = PE : GE - PV$, hoc est

$$\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx} : t - \frac{z}{Q} + y.$$

Hinc provenit

$$t = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy} - y = GE \quad \text{et} \quad AE = x + \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy},$$

unde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG, erit

$$QG^2 = \frac{z^2(dx + Pdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2} + \frac{z^2(dy + Qdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2}$$

et

$$QG = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz^2(1 + P^2 + Q^2))}}{Qdx - Pdy}$$

atque ipsa

$$MG = \frac{z(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{Qdx - Pdy}.$$

PROPOSITIO 95

PROBLEMA

856. *Si corpus super superficie motum a quotcunque potentiis sollicitetur, definire vires normales, prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.*

SOLUTIO

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas x, y, z. Sit nunc vis corpus in M (Fig. 92, p. 431) secundum parallelam abscissae PA trahens $= E$, vis secundum parallelam ipsi QP trahens $= F$ et vis secundum MQ trahens $= G$. Singulae ergo hae vires resolvendae sunt in ternas, normalem pre-

mentem scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae tres directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires normales et tangentiales prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem illarum virium directiones cum istis constituunt.

Incipiamus a vi tangentiali, cuius directio est MT, existente

$$AF = \frac{z\,dx}{dz} - x \quad \text{et} \quad FT = y - \frac{z\,dy}{dz}$$

atque

$$QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz} \quad \text{et} \quad MT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dz}.$$

Unde erit cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali constituit,

$$= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

In quem si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta

$$= \frac{G\,dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Cosinus vero anguli, quem MT constituit cum directione vis F, quae est ipsi QP parallela, est

$$= \cos. PQT. \sin. QMT^{1)} = \frac{PQ - FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Vis ergo tangentialis ex F orta est

$$= \frac{F\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Cosinus porro anguli, quem directio vis E constituit cum MT, est

$$= \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

ideoque vis tangentialis ex vi E orta

$$= \frac{E\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

1) Editio princeps: $\int QMT$; vide notam p. 62 T. I. P. St.

Iam consideretur (Fig. 91, p. 417) vis premens, cuius directio est MN, existente

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -y - Qz$$

seu

$$PH = Pz \quad \text{et} \quad QP + HN = -Qz.$$

Ex quo erit

$$QN = z\sqrt{(P^2 + Q^2)} \quad \text{et} \quad MN = z\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}.$$

Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus est

$$\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

ideoque vis premens ex G orta

$$= \frac{G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, cum MN constituit, cosinus est

$$= \cos. PQN. \sin. QMN^{1)} = \frac{(PQ + HN)QN}{QN \cdot MN} = -\frac{Q}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Ergo vis premens ex vi F orta est

$$= -\frac{FQ}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Atque simili modo (Fig. 94, p. 435) vis premens ex vi E orta est

$$= -\frac{EP}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Denique cum vis deflectentis directio sit MG atque

$$PE = \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy} \quad \text{et} \quad QP + EG = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy},$$

erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus

$$= \frac{Qdx - Pdy}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}};$$

---

1) Editio princeps: $fQMN$. P. St.

quare vis deflectens ex vi G orta est

$$=\frac{G(Qdx-Pdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Porro anguli, quem MG cum directione vis F constituit, cosinus est

$$=\frac{PQ+EG}{MG}=\frac{dx+Pdz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}};$$

quamobrem vis deflectens ex vi F orta est

$$=\frac{F(dx+Pdz)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Denique anguli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est

$$=\frac{-PE}{MG}=\frac{-dy-Qdz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Vis ergo deflectens ex vi E orta est

$$=\frac{-E(dy+Qdz)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Cum autem ante vim tangentialem vocaverimus T, vim prementem $=M$ et vim deflectentem $=N$, ad has vires tres propositas E, F et G reduximus; erit namque

$$T=\frac{Edx+Fdy+Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$$

et

$$M=\frac{-EP-FQ+G}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$$

atque

$$N=\frac{-E(dy+Qdz)+F(dx+Pdz)+G(Qdx-Pdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

857. Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G sollicitetur, erit posito v pro altitudine debita celeritati in M

$$dv = -Edx - Fdy - Gdz$$

(§ 849), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentiarum E, F et G orta.

COROLLARIUM 2

858. Si praeterea corpus in medio resistente moveatur atque resistentia in M fuerit $= R$, erit [§ 850]

$$dv = -Edx - Fdy - Gdz - R\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

COROLLARIUM 3

859. Si in aequatione § 851 inventa, in qua effectus vis deflectentis N est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione virium E, F et G orta, prodibit

$$\frac{2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pdz)}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$
$$= -E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) - G(Pdy - Qdx).$$

COROLLARIUM 4

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus confletur una eliminanda v, prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

COROLLARIUM 5

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam premitur, tam ex vi normali premente M quam ex vi centrifuga orta est

$$= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

(§ 845) substituto loco M valore invento.

COROLLARIUM 6

862. Est vero ex aequatione corollario 3 inventa

$$2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(E(dy + Qdz) - F(dx + Pdz) + G(Pdy - Qdx))}{-ddz(Pdy - Qdx) + ddy(dx + Pdz)},$$

quo valore ibi substituto prodibit tota pressio

$$= \frac{(Gdxddy - Fdxddz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}.$$

SCHOLION

863. Quia tres potentiae E, F, G directiones habent invicem normales, erit potentia iis aequivalens $= \sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$. His vero tribus viribus aequivalere invenimus tres M, N et T, quarum directiones sunt quoque invicem normales; quare istis tribus aequivalens vis erit $= \sqrt{(M^2 + N^2 + T^2)}$. Quamobrem, si loco M, N et T substituantur valores inventi ex E, F et G, prodire debet quoque $\sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$; id quod calculo instituto re ipsa se habere deprehendetur. Inservit autem hoc instar probationis, utrum calculus prolixus, quo haec resolutio est absoluta, recte fuerit institutus, an vero secus. Hac vero probatione instituta reperientur se hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96

PROBLEMA

864. *In hypothesi gravitatis uniformis et deorsum directae g determinare lineam, quam corpus super quacunque superficie proiectum in vacuo describit.*

SOLUTIO

Sit APQ (Fig. 92, p. 431) planum horizontale et M punctum tam in superficie data quam in linea a corpore descripta. Erit ergo MQ verticalis et propterea directio vis gravitatis g. Positis $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ atque aequatione superficiei naturam exprimente $dz = Pdx + Qdy$ sit celeritas in M, qua elementum Mm percurritur, debita altitudini v. Cum igitur problema hoc sit casus praecedentis, fit enim $G = g$, $E = 0$ et $F = 0$, habebuntur hae duae aequationes

$$dv = -gdz$$

(§ 857) atque

$$2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pdz) + g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

[§ 859]. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum esset, si in planum horizontale APQ perveniret, $= b$; erit

$$v = b - gz.$$

Per alteram vero aequationem est

$$2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}.$$

Unde erit

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dzddz(Pdy - Qdx) - dzddy(dx + Pdz)}{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Quae aequatio ope aequationis $dz = Pdx + Qdy$ transmutatur in hanc

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \frac{Pddy}{Pdy - Qdx};$$

quae integrata dat

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}.$$

In quovis ergo casu speciali investigari debet, an

$$\frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$$

integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in differentialibus primi gradus; atque cum sit $v = b - gz$, orietur aequatio differentialis primi gradus curvae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in superficiem secundum normalem erit

$$= \frac{gdxddy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)},$$

quae sublatis differentialibus secundi gradus [§ 861] abit in hanc

$$\frac{-g}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} - \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi gravitatis uniformis g et deorsum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cognosci potest, omnino ut si corpus in eodem plano moveretur.

COROLLARIUM 2

866. Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt, erit

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}.$$

Per aequationem ergo inventam erit

$$ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx} \quad \text{atque} \quad \frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}.$$

COROLLARIUM 3

867. Ex inventis aequationibus reperietur

$$ddy = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx + dQdy)(Pdy - Qdx)}{(1+P^2+Q^2)dx}$$

atque

$$ddz = \frac{gQ(Pdy - Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx + dQdy)(dx + Pdz)}{(1+P^2+Q^2)dx}.$$

Hinc erit

$$dzddy - dyddz = \frac{gP(Pdy - Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2(b-gz)(1+P^2+Q^2)} - \frac{(dPdx + dQdy)(dy + Qdz)}{1+P^2+Q^2}.$$

Curvae vero descriptae radius osculi erit

$$= \frac{2(dx^2+dy^2+dz^2)(b-gz)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{\sqrt{(g^2(Pdy - Qdx)^2(dx^2+dy^2+dz^2) + 4(b-gz)^2(dPdx + dQdy)^2)}}.$$

SCHOLION

868. Harum formularum usum in casibus particularibus, quibus certa quaedam species superficierum consideratur, in sequentibus problematis fusius exponemus, quibus singularium superficierum exempla adiungemus.

PROPOSITIO 97

PROBLEMA

869. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis g determinare motum corporis in superficie cuiuscunque cylindri, cuius axis sit verticalis.*

SOLUTIO

Quia axis cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales inter se aequales; sit igitur $ABQC$ (Fig. 95, p. 444) basis cylindri, in cuius

superficie movetur corpus. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$ sitque z corporis altitudo super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius superficiei

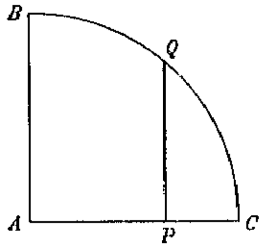


Fig. 95.

cylindricae hac exprimetur aequatione $0 = Pdx + Qdy$ seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates infinite magnae, seu evanescente coefficiente ipsius dz, si quem assumsissemus. Quamobrem in aequationibus ante inventis P et Q quasi quantitates infinite magnae considerari debent, etiamsi sint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y tantum neque in iis inerit z. His ergo in calculum deductis habebitur

$$v = b - gz$$

atque

$$2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzddy - Pdyddz + Qdxddz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzddy - dy^2ddz - dx^2ddz}$$

propter analogiam $P : Q = dy : -dx$. At posterior aequatio logarithmica erit

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - l(dx^2 + dy^2) + lc.$$

Unde fit

$$\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{b - gz}{c} = 1 + \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Hinc oritur

$$(b - c - gz)(dx^2 + dy^2) = cdz^2$$

seu

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b - c - gz)}},$$

cuius integralis est

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{2\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}\ {}^{1)},$$

ubi $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percursum. Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt, erit

$$\frac{ddt}{dt} = \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} \quad \text{atque} \quad \alpha dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}\ {}^{2)}$$

---

1) Editio princeps: $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}$. Correxit P. St.

2) Ex aequatione $\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2}$ sequitur constantem α esse $= \sqrt{c}$. P. St.

porroque

$$\alpha t = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Quare tempora erunt proportionalia arcubus in basi respondentibus.

Aequatio autem

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{2\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$$

dabit aequationem pro curva in superficie cylindrica descripta, si haec superficies in planum concipiatur explicata; denotabit enim tum $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ abscissam in axe horizontali et z applicatam verticalem. Proiectionem vero curvae descriptae in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante habebimus, si ope aequationis $Pdx + Qdy = 0$ eliminetur y, ut prodeat aequatio inter x et z, quae erunt coordinatae huius proiectionis. Scilicet ob $dy = -\frac{Pdx}{Q}$ erit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{Q}\sqrt{(P^2 + Q^2)}$$

ideoque

$$\int \frac{dx\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{Q} = -\frac{2\sqrt{c(b-c-gz)}}{g},$$

ubi in P et Q loco y eius valor in x debet substitui.

Pressio vero, quam superficies sustinebit, a sola vi centrifuga orietur propter potentiam g in ipsa superficie sitam eritque

$$= \frac{2(b-gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2)}},$$

qua vi corpus ab axe cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit affirmativa. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

870. Curva ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proiectoriam, quam corpus proiectum in plano verticali describeret.

COROLLARIUM 2

871. Si motus corporis super superficie cylindrica compositus consideretur ex motu verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex

horizontali, erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportionalia sunt $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, i. e. arcubus horizontali motu percursis. Motus vero verticalis erit vel aequabiliter acceleratus vel retardatus.

COROLLARIUM 3

872. Si ergo motus horizontalis evanescit, corpus recta vel ascendet vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus prodit, si fuerit $c=0$, quo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ evanescit.

EXEMPLUM

873. Sit basis cylindri circulus, cuius quadrans sit BQC et radius $AB=a$; erit $x^2+y^2=a^2$ et $xdx+ydy=0$. Fiet ergo $P=x$ et $Q=y=\sqrt{(a^2-x^2)}$. Proiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticali ex AC erecto exprimetur aequatione

$$\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\frac{2\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}.$$

Si ergo fuerit $c=0$, fiet $dx=0$ atque $x=$ constanti; quare hoc casu proiectio erit linea recta. Curva vero, quae est proiectio pro quocunque ipsius c valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet, est

$$=\frac{2(b-gz)(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)a}=\frac{2c}{a}$$

propter aequationem

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}.$$

Quare pressio ubique erit constans et ipsi c proportionalis.

COROLLARIUM 4

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylinder quicunque sustinet,

$$\frac{2c(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}=\frac{2Q^2c(dPdx+dQdy)}{dx^2(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2Qc(QdP-PdQ)}{dx(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

SCHOLION

875. Non solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica erecta corporis motus facile potest determinari, sed etiam, si cylindri axis fuerit horizontalis, eadem facilitate motus corporis cognoscetur. Namque si corpus non habeat motum horizontalem iuxta axem cylindri, corpus perpetuo in eadem cylindri sectione permanebit in eaque movebitur tanquam super linea data. Sin vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit neque alterum motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus corporis motus facile cognoscetur.

PROPOSITIO 98

PROBLEMA

876. *Si corpus moveatur in superficie solidi rotundi, cuius axis est verticalis AL* (Fig. 96), *in vacuo a gravitate uniformi g sollicitatum, determinare motum corporis super huiusmodi superficie.*

SOLUTIO

Generetur solidum rotundum conversione curvae AM circa axem verticalem AL; erunt omnes eius sectiones horizontales circuli, quorum radii sunt applicatae curvae AM. Aequatio ergo naturam huius superficiei exprimens erit

$$dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{Z}$$

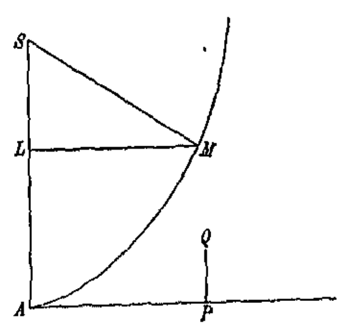


Fig. 96.

denotante Z functionem quamcunque ipsius z; erit enim

$$2\int Z\,dz = x^2 + y^2 = LM^2.$$

Si ergo detur aequatio pro curva AM inter $AL = z$ et $LM = \sqrt{2\int Z\,dz}$, dabitur quoque Z. His praemissis erit itaque

$$P = \frac{x}{Z} \quad \text{et} \quad Q = \frac{y}{Z};$$

qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequationes, ex quibus tam curva descripta quam motus super ea cognoscetur

$$v = b - gz$$

atque

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{xddy}{xdy - ydx} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2l(xdy - ydx) + \text{const.}$$

Quare erit

$$v = \frac{c^3(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(xdy - ydx)^2} = b - gz.$$

Ponatur $x^2 + y^2 = u^2$; erit u functio quaedam ipsius z, nempe

$$u^2 = 2\int Zdz,$$

atque superior aequatio abibit in hanc

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(c^3dz^2 + u^2du^2(b - gz))}}{\sqrt{(u^2(b - gz) - c^3)}}.$$

Proiectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y habebitur, si ex aequatione $x^2 + y^2 = 2\int Zdz$ valor ipsius z in x et y substituatur; huiusque proiectionis arcus est $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. In plano autem verticali habebitur proiectio eleminanda y; quo facto prodit aequatio

$$\frac{udx - xdu}{c\sqrt{c(u^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2 + dz^2}{u^2(b - gz) - c^3}},$$

quae aequatio, si per u dividatur, constructionem admittit. Pressio vero, quam superficies sustinet axem versus, erit

$$= \frac{-gZ}{\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}} - \frac{2c^3Z(dx^2 + dy^2) - 2c^3dZ(xdx + ydy)}{Z(xdy - ydx)^2\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

877. Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt, erit

$$\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xdy - ydx},$$

cuius integralis est

$$\alpha dt = xdy - ydx.$$[1]

Ipsum ergo tempus erit ut

$$xy - 2\int ydx$$

denotante $\int ydx$ aream proiectionis in plano horizontali.

COROLLARIUM 2

878. Si corpus in proiectione in plano horizontali moveri concipiatur, erit celeritas eius in Q debita altitudini

$$\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xdy)^2};$$

ex quo motu in proiectione ipse motus in superficie invenietur.

COROLLARIUM 3

879. Sit igitur BQC (Fig. 97) proiectio curvae in plano horizontali, in qua moveatur corpus, ita ut motus eius respondeat motui corporis in superficie ipsa; erit tempus, quo arcus BQ absolvitur, ut

$$\frac{xy}{2} - \int ydx$$

seu negative ut

$$\int ydx - \frac{xy}{2},$$

i. e. ut area BAQ ducto radio AQ.

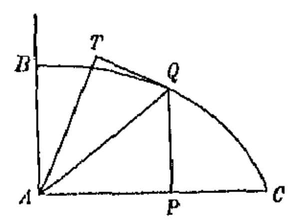


Fig. 97.

COROLLARIUM 4

880. Areae autem BAQ elementum est

$$\frac{ydx - xdy}{2}.$$

1) Ex aequatione § 876 $v = \frac{c^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$ sequitur constantem α esse $= c\sqrt{c}$. P. St.

Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculo AT erit

$$AT = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Quare altitudo celeritati in Q debita est

$$= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$$

posito $AT = p$.

COROLLARIUM 5

881. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea movebitur, ac si libere moveretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A [T. I § 587].

COROLLARIUM 6

882. Respondeat punctum B motus in superficie facti initio, et cum detur directio prima motus in superficie, dabitur perpendiculum in tangentem in B. Sit ergo $AB = f$ et perpendiculum in tangentem $= h$; erit altitudo celeritati in B debita $= \frac{c^3}{h^2}$.

COROLLARIUM 7

883. Vis ergo centripeta versus A tendens, quae faciet, ut corpus in proiectione BQC libere moveatur, erit

$$= \frac{2c^3 dp}{p^3 du}$$

posito u pro $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Aequatio vero inter u et z exprimet naturam curvae, cuius conversione genita est superficies proposita, ideoque datur.

COROLLARIUM 8

884. Est porro

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{udu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}} \quad \text{et} \quad ydx - xdy = \frac{pudu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}}.$$

Hi valores, si in aequatione inventa substituantur, dabunt

$$c^3u^2du^2 + c^3u^2dz^2 - c^3p^2dz^2 = (b - gz)p^2u^2du^2$$

seu

$$p^2 = \frac{c^3u^2(du^2 + dz^2)}{c^3dz^2 + u^2du^2(b - gz)}.$$

COROLLARIUM 9

885. Huius ergo quantitatis

$$-\frac{c^3dz^2 + u^2du^2(b - gz)}{u^2(du^2 + dz^2)}$$

differentiale per du divisum dabit vim centripetam in A requisitam, ut corpus in proiectione BQC moveatur libere, motu respondente motui corporis in superficie.

COROLLARIUM 10

886. Si $c = 0$, fiet quoque $p = 0$. Quare hoc casu proiectio in plano horizontali erit recta per A transiens, super qua corpus ad A accedens ita attrahetur, ut sit vis centripeta

$$\frac{1}{du}d.\frac{-du^2(b - gz)}{du^2 + dz^2}.$$

COROLLARIUM 11

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis, tangens in B ad AB erit normalis ideoque $h = f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis erit celeritati in proiectione; quare si fuerit i valor ipsius z, si est $u = f$, erit

$$b - gi = \frac{c^3}{f^2}.$$

COROLLAR·

888. Si praeterea vis centripeta
curva BQC erit circulus et propter

descripta atque motus tam in superficie quam in proiectione aequabilis. Sit, ubi est $u=f$ et $z=i$, $dz=mdu$; erit ob $p=f$ et $u=f$ et $z=i$ in casu, quo circulus describitur,

$$2c^3=gmf^3.\text{[1]}$$

COROLLARIUM 13

889. Si ponatur $\pi:1$ ut peripheria ad diametrum, erit circuli nostri peripheria $=2\pi f$, quae divisa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^3}{f^2}}$, i. e. $\sqrt{\frac{gmf}{2}}$, dat tempus unius periodi in circulo, quod ergo erit

$$=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}.$$

Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas absolvens erit $=\frac{f}{m}$ in eadem gravitatis hypothesi.

COROLLARIUM 14

890. In superficie ergo, quae generatur conversione curvae AM (Fig. 96, p. 447) circa axem verticalem AL, corpus proiectum circulum radii LM describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis = subnormali LS integram oscillationem absolvit.

COROLLARIUM 15

891. Si ergo curva AM fuerit parabola, omnes periodi per circulos horizontales in conoide parabolica aequalibus absolventur temporibus; atque penduli iisdem temporibus oscillationes integras peragentis longitudo aequabitur dimidiae parti parametri.

SCHOLION 1

892. Quaecunque assumatur curva AM, si vis centripeta motus in proiectione versus A ex data formula definiatur eaque aequalis ponatur vi centrifugae atque coniungatur cum aequatione $b-gi=\frac{c^3}{f^2}$, prodibit

$$2c^3=gmf^3;$$

1) Vide demonstrationem § 892 datam. P. St.

hoc enim casu tam proiectio erit circulus quam ipsa curva in superficie descripta. Quo vero hoc melius appareat, ponatur $dz = qdu$ proveniet que [§ 884] vis centripeta

$$= \frac{2qdq(bu^2 - gzu^2 - c^3)}{u^2du(1+q^2)^2} + \frac{2c^3q^2 + gqu^3}{u^3(1+q^2)}.$$

Iam ponatur $u = f$, $z = i$ et $bf^2 = gf^2i + c^3$ atque $q = m$; erit vis centripeta

$$= \frac{2c^3m^2 + gmf^3}{f^3(1+m^2)};$$

aequalis posita vi centrifugae $\frac{2c^3}{f^3}$ dat

$$2c^3 = gmf^3.$$

EXEMPLUM

893. Sit superficies conica circularis seu AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449) linea recta utcunque inclinata ad axem AL; quare erit $z = mu$ et $dz = mdu$. Vis ergo centripeta ad A tendens, quae faciet, ut corpus libere in proiectione BQC moveatur, erit

$$= \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}.$$

Haec ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distantiarum a centro A proportionali. Si $c = 0$, tum proiectio erit linea recta per A transiens atque vis centripeta erit $= \frac{gm}{1+m^2}$ sive constans. Corpus ergo motu aequabiliter accelerato ad A accedet; motus vero in superficie conica congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque pariter aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curvilinea et tangens in B normalis ad AB, erit $i = mf$ atque

$$b - gmf = \frac{c^3}{f^2}$$

posito $AB = f$. Erit ergo hoc casu

$$b = \frac{c^3 + gmf^3}{f^2},$$

atque si corpus in circulo horizontali revolvitur, erit insuper

$$2c^3 = gmf^3.$$

Quo ergo hoc accidat, debet esse celeritas corporis debita altitudini

$$\frac{c^3}{f^2} = \frac{gmf}{2}.$$

Atque periodi in hoc circulo iisdem absolventur temporibus, quibus penduli longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, verum tamen

$$b = \frac{c^3 + gmf^3}{f^3},$$

curva BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, curva quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, in quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per propositionem 91 libri praecedentis determinatur. Quoniam enim vis centripeta est

$$\frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)},$$

si haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, ob $y = u$ erit

$$P = \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{1+m^2} \quad \text{atque} \quad \frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^2 + gmu^3} \quad \text{atque} \quad \frac{Pdy}{ydP} = \frac{2mc^3 + gu^3}{3gu^3};$$

ideoque posito $u = f$ distabit quoque linea absidum a praecedente abside angulo

$$180\sqrt{\frac{2mc^3 + gf^3}{3gf^3}} \text{ grad.}$$

Quoniam autem proxime est $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas absides interceptus $= 180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$, erit angulus inter duas absides interceptus maior quam $103°55'$.

SCHOLION 2

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super ea determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae movebitur et vel circulos describet vel alias curvas non parum elegantes, quemadmodum cuivis

experimentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos absolvit, a Cel. Ioh. Bernoullio in Act. Lips. A. 1715 iam est expositus sub titulo *motus turbinatorii.*[1]) At si curva non fuerit circulus, nemo, quantum scio, hunc penduli motum vel consideravit vel determinavit.[2])

DEFINITIO 6

895. *Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsi motus.* Hoc ergo casu pendulum non in eodem plano verticali movetur, sed curvam quandam describet in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa penduli longitudo, sitam.

PROPOSITIO 99

PROBLEMA

896. *Penduli ad motum turbinatorium incitati determinare motum et lineam curvam, quam in superficie sphaerica describit.*

SOLUTIO

Quia corpus motum pendulo est alligatum, in superficie sphaerica movebitur, cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius sphaerae $= a$; erit

$$z = a - \sqrt{(a^2 - u^2)}$$

ex natura circuli AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449). Erit ergo

$$y = \frac{u}{\sqrt{(a^2 - u^2)}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{a^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ideoque

$$\frac{2y\,dy}{u^2 du} = \frac{2a^2}{u(a^2 - u^2)^2}.$$

1) Ioh. Bernoulli, *De centro turbinationis inventa n*...
omnia, Tom. 2, Lausannae et Genevae 1742, p. 187; vi...
latorum, Paris 1673, Pars V; *Opera varia*, Vol. I, Lugd...

2) I. Newtonus hoc problema considerasse nec ...
est; vide *Philosophiae naturalis principia mathematica*,
et LVI ... P. St.

Ex his invenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, ut corpus in proiectione BQC libere moveatur,

$$=\frac{2bu-2gau+3gu\sqrt{(a^2-u^2)}}{a^2}.$$

Atque pro curva BQC haec habebitur aequatio

$$p^2=\frac{a^2c^3}{c^3+(b-ga)(a^2-u^2)+g(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quae ad proiectionem BQC construendam sufficit. Sit tangens in B perpendicularis ad radium AB, id quod semper alicubi contingere debet, nisi proiectio sit linea recta, quia vis centripeta decrescit decrescente u. Ponatur $AB=f$; erit

$$i=a-\sqrt{(a-f^2)}$$

atque

$$b-ga+g\sqrt{(a^2-f^2)}=\frac{c^3}{f^2}.$$

Si praeterea fuerit

$$2c^3=\frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}},$$

corpus in circulo revolvetur, cuius radius est f, celeritate debita altitudini

$$\frac{c^3}{f^2}=\frac{gf^2}{2\sqrt{(a^2-f^2)}}.$$

Penduli vero integras oscillationes iisdem temporibus absolventis longitudo est $=\sqrt{(a^2-f^2)}$. Sin autem non fuerit $2c^3=\frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, differentia vero sit valde exigua, curva BQC a circulo non multum discrepabit. Cuius curvae quo positiones absidum inveniantur, erit iuxta propositionem 91 libri praecedentis

$$y=u \quad \text{et} \quad P=\frac{u^4}{a^2}\left(2b-2ga+3g\sqrt{(a^2-u^2)}\right).$$

Hinc est

$$\frac{dP}{P}=\frac{4du}{u}-\frac{3gudu}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$$

atque

$$\frac{ydP}{Pdy}=4-\frac{3gu^2}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}.$$

Quia curva fere est circulus, ponatur $u = f$ atque

$$2b - 2ga = \frac{gf^2}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} - 2g\sqrt{(a^2 - f^2)} = \frac{3gf^2 - 2ga^2}{\sqrt{(a^2 - f^2)}},$$

quo facto prodibit

$$\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3f^2}{a^2}.$$

Hinc sequitur intervallum inter duas absides esse angulum

$$\frac{180a}{\sqrt{(4a^2 - 3f^2)}} \text{ grad.}$$

Tanto scilicet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime distat, dissitus est a loco, in quo pendulum axi est proximum. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

897. Quo igitur pendulum $AB = a$ (Fig. 98) motu turbinatorio circulum $BDCE$ describat, oportet, ut eius celeritas debita sit altitudini $\frac{g}{2}\frac{BO^2}{AO}$.

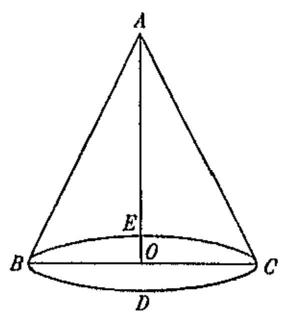


Fig. 98.

COROLLARIUM 2

898. Longitudo vero penduli, quod oscillationes minimas integras eodem tempore absolvit, quo periodus in circulo $BDCE$ conficitur, est $= AO$.

COROLLARIUM 3

899. Tempora ergo, quibus diversi circuli motu turbinatorio a pendulo AB percurruntur, sunt in subduplicata ratione altitudinum AO.

COROLLARIUM 4

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maximum conficiat, cuius radius est a, celeritas infinite magna requiritur atque quaeque periodus tempore infinite parvo absolvitur.

COROLLARIUM 5

901. Si radius circuli BO fuerit valde parvus respectu penduli $AB = a$, congruent periodi motus turbinatorii cum oscillationibus integris eiusdem penduli.

COROLLARIUM 6

902. Si curva descripta non fuerit circulus, sed figura proxima atque BO valde parvum, erit angulus inter duas absides 90^0 seu rectus.

COROLLARIUM 7

903. Hoc vero casu curva a corpore descripta erit ellipsis centrum habens in A. Quod ex vi centripeta colligitur, quae tum ipsis distantiis fit proportionalis.

COROLLARIUM 8

904. Quo maior autem est radius BO, eo maior quoque erit angulus inter duas absides interceptus. Atque si fiat $BO = BA$, erit hic angulus 180^0.

COROLLARIUM 9

905. Si angulus BAO fuerit 30 graduum, erit $BO = \frac{1}{2} BA$ seu $f = \frac{1}{2} a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum seu $99^0\,50'$. Proiectionis ergo in plano horizontali haec erit figura $abcdefghik$ etc. (Fig. 99, p. 459) in qua absides summae sunt in a, c, e, g, i et imae in b, d, f, h, k.

COROLLARIUM 10

906. In hac igitur figura linea absidum movetur in consequentia; singulis enim periodis circiter 39^0 progredietur in consequentia.

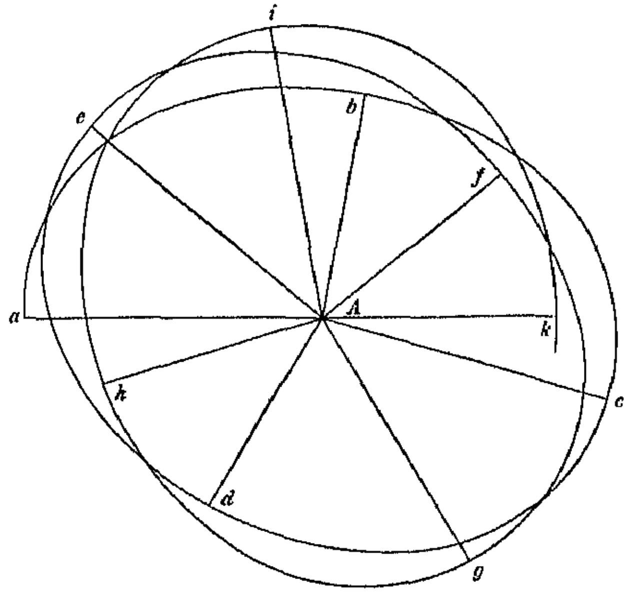


Fig. 90.

COROLLARIUM 11

907. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30 graduum, tum minor etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quovis angulo BAO statim cognoscatur, fractionem

$$\frac{a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$$

in seriem resolvo, quae erit sequens

$$\frac{1}{2}+\frac{3f^2}{16a^2}+\frac{27f^4}{256a^4}+\text{etc.}$$

Una ergo periodo linea absidum promovetur angulo $\frac{135f^2}{a^2}$ graduum quam proxime, si f valde est parvum.

COROLLARIUM 12

908. Ex his apparet promotionem lineae absidum in singulis periodis proxime esse in duplicata ratione sinus anguli BAO.

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS I ET II CONTINENTUR